Nº Inv. 4190.

Dopełnienie Algebry
mianowicie
Rozwiązanie równań drugiego stopnia
z dwiema niewiadomemi
wypadających z zadań nieoznaczonych

Rękopis składa się
z dwunastu arkuszy

Zadania nieoznaczone prowadzące do zrównań drugiego stopnia z dwiema nieznanemi.

§1. Nim się zajmę zrównaniami drugiego stopnia z dwiema nieznanemi, dopełniając niejako tego co brakuje między temi tu i zrównaniami pierwszego stopnia, o których w mej Algebrze obszernie i ile mi się zdaje jasno mówiłem, powiedzieć wprzód muszę o zagadnieniach prowadzących do zrównania ani tu ani tam nienależących z powodu że zupełnie osobny jest sposób ich rozwiązania. Zagadnienia bowiem tego rodzaju prowadzą do zrównań wprawdzie z dwiema nieznanemi ale takich, że jedna z nieznanych może być nie tylko w drugim ale nawet w wyższych stopniach, druga zaś stale w pierwszym stopniu.

Wszystkie takie zrównania wystawić zawsze można pod postacią

$$0 = a+bx+\alpha y+cx^2+\beta xy+dx^3+\gamma x^2y+ex^4+\delta x^3y+\dots$$

Zamierzając takie zrównanie rozwiązać w liczbach całkowitych, mamy naprzód

$$y = -\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\dots},$$

założony warunek powiada, co z ostatniego zrównania czytamy, że potrzeba na nieznaną x znaleźć takiej wartości lub wartości całkowite, żeby y było również liczbą całkowitą. Na ten koniec połóżmy

$$p = a+bx+cx^2+dx^3+\dots$$
$$q = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\dots$$

a otrzymamy $y = -\frac{p}{q}$ skąd $qy = -p$

Z ostatnich dwóch zrównań wyrugowawszy x sposobem jak w Algebrze wskazałem, otrzymamy zrównanie postaci

$$0 = A+Bp+Cq+Dp^2+Epq+Fq^2+Gp^3+\dots$$

w którem współczynniki $A, B, C, D\dots$ są funkcyjami wymiernemi współczynników pierwiastkowego zrównania $a, b, c, \dots \alpha, \beta, \gamma\dots$;

A ponieważ wyżej mamy $p = -qy$, przeto położywszy tę wartość w ostatniem zrównaniu, znajdziemy

$$0 = A-Bqy+Cq+Dq^2y^2-Eq^2y+Fq^2-Gq^3y^3+\dots$$

Jeżeli q i y mają być razem całkowitemi, tedy ponieważ wszystkie wyrazy, oprócz pierwszego są widocznie podzielnemi przez q, ~~tedy~~ i ten pierwszy t.j. A koniecznie musi być podzielnym przez q. Znalazłszy wszystkie dokładne dzielniki liczby A, potrzeba każdy z nich położyć za q tak dodatnie jako też i odjemnie w zrównaniu $q = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\dots$ i za każdym położonym dzielnikiem rozwiązać zrównanie, a otrzymane wartości na x, ale tylko całkowite, położyć w zrównanie $p = a+bx+cx^2+\dots$ Tym sposobem łatwo się przyjdzie do wartości x czyniących $\frac{p}{q}$, a następnie y liczbą całkowitą, oraz przyjdziemy do rozwiązania danego zrównania, bo znajdziemy wszystkie jego rozwiązania w liczbach całkowitych.

W przypadku gdyby było $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$ i t.d. zrównanie podanym tu sposobem rozwiązanem być nie mogło, bo q wypadnie niezależnem od x t.j. $q=\alpha$, a to według x rozwiązanem być nie może. W tym razie potrzeba usiłować wyznaczyć ze zrównania $p = a+bx+cx^2+\dots$ x tak, żeby p podzielnem było przez α, jak naucza Lagranż w dodatku do Algebry Eulera wydanej w Paryżu r. 1807 przez Garnier.

Zobaczmy to postępowanie na przykładach.

1. Znaleźć dwie liczby całkowite takie, iżby 5 razy wzięty ich iloczyn i powiększony 7 razy wziętą drugą, a zmniejszony ~~równał się~~ 44 razy wziętą pierwszą liczbę ~~powiększ.~~ równał się 76.

Zadanie to prowadzi do zrównania $5xy+7y-44x=76$, z którego

$$y=\frac{76+44x}{7+5x}=\frac{p}{q}$$

zatem $p=76+44x$ a $q=7+5x$. Rugując z tych to dwóch zrównań x, znajdziemy $0=72+44q-5p$ czyli $0=72+44q-5qy$, zatem $A=72$. Lecz $72=\pm1.\pm72=\pm2.\pm36=\pm4.\pm18=\pm6.\pm12=\pm8.\pm9$

Kładąc przeto te dzielniki z obu znakami za q, znajdziemy x całkowite tylko

dla $q=2$ .... $x=-1$ a potem $p=32$, skąd następnie $\frac{p}{q}=y=16$
$q=-8$ .... $x=-3$ ..... $p=-56$ .... $y=7$
$q=-18$ .... $x=-5$ ..... $p=-144$ .... $y=8$
$q=12$ .... $x=1$ ..... $p=120$ .... $y=10$
$q=72$ .... $x=13$ ..... $p=648$ .... $y=9$

Podane więc zadanie ma tylko pięć następnych rozwiązań w liczbach całkowitych

$$x=-1,\ -3,\ -5,\ 1,\ 13$$
$$y=16,\ 7,\ 8,\ 10,\ 9$$

w liczbach zaś całkowitych i dodatnych tylko dwa, t.j.

$$x=1,\ 13$$
$$y=10,\ 9$$

2. Jakież są dwie liczby całkowite takie, że 7 razy wzięty ich iloczyn powiększony 4 razy wziętą pierwszą a pomniejszony o 10, równa się 2 razy wziętemu kwadratowi pierwszej powiększonemu 5 razy wziętą drugą liczbą ~~[illegible]~~?

Oznaczywszy pierwszą przez x a drugą liczbę przez y, według warunków zadania mamy następujące zrównanie

$$7xy+4x-10=2x^2+5y$$

skąd

$$y=\frac{10-4x+2x^2}{-5+7x}=\frac{p}{q}$$

t.j. $p=10-4x+2x^2$ a $q=-5+7x$.

Rugując z dwóch ostatnich zrównań x, znajdziemy $A=400$. Dokładnymi dzielnikami liczby 400 są: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400. Ponieważ $x=\frac{q+5}{7}$, przeto kładąc za q każdy z tych dzielników z obu znakami i zatrzymując tylko wartości x całkowite, znajdziemy

dla $q=2$ .... $x=1$ .... $p=8$ a stąd $y=4$
$q=-5$ .... $x=0$ .... $p=10$ .... $y=-2$
$q=16$ .... $x=3$ .... $p=16$ .... $y=1$
$q=-40$ .... $x=-5$ .... $p=80$ .... $y=-2$
$q=100$ .... $x=15$ .... $p=400$ .... $y=4$

Rozwiązania przeto naszego zadania są tylko następujące

$$x=1,\ 0,\ 3,\ -5,\ 15$$
$$y=4,\ -2,\ 1,\ -2,\ 4$$

w liczbach zaś całkowitych i dodatnych tylko trzy, mianowicie

$$x=1,\ 3,\ 15$$
$$y=4,\ 1,\ 4$$

Tym samym sposobem rozwiążą się zadania następujące:

3. Znaleźć dwie liczby całkowite, których 5 razy wzięty iloczyn równa się 2 razy wziętej pierwszej więcej 3 razy wziętą drugą i więcej 18.

4. Znaleźć dwie całkowite liczby których suma równa się ich iloczynowi.

5. Znaleźć dwie liczby całkowite których suma i iloczyn razem wzięte czynią 139. W tem ostatniem zadaniu znajdziemy pięć rozwiązań w liczbach całkowitych i dodatnych, mianowicie: $x=1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9$; $y=69,\ 34,\ 27,\ 19,\ 13$; inne bowiem będą symetryczne z temi, bo w wypadku zrównanie symetryczne względem x i y, i dlatego osobnych rozwiązań nie stanowią.

6. Za ostatni przykład weźmy zrównanie

$$x^3-5x^2y+24x-2xy-8y+72=0$$

i szukajmy wartości na x i y w liczbach całkowitych sprawdzających to zrównanie. Tu mamy $p=72+24x+x^3$ a $q=8+2x+5x^2$. Rugując x z dwóch ostatnich zrównań, znajdziemy $A=700160$. Liczba ta ma 36 dzielników dokładnych które by według prawidła potrzeba każdy z obu znakami położyć za q, żeby było bardzo mozolnej a nie potrzebnej ~~pracy~~ pracą; gdy bowiem $x=-\frac{1}{5}\pm\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{q-8}{5}}$, oczywistem jest przeto że ani dzielników mniejszych od 8, ani też odjemnie żadnego położyć nie można, boby się otrzymało wartości na x urojone. Pozostaje więc próbowanie dzielników tylko ze znakami dodatnemi, a z pomiędzy 36 tych znajdzie się tylko jeden, mianowicie 32 który wyda jedną tylko wartość całkowitą t. j. $x=2$, z której się znajdzie $p=128$ a potem $y=4$. Jedynem więc rozwiązaniem założonego zrównania w liczbach całkowitych jest

$$x=2,\quad y=4$$

które łatwo sprawdzić.

Rozumiem że na tych przykładach poprzestać mogę bez obawy niezrozumienia postępowania z tego rodzaju zrównaniami; przystępuję zatem do zrównań właściwych drugiego stopnia o dwóch niewiadomych. —

§2. Każde zrównanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi wystawić można pod następującą najogólniejszą postacią

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0$$

gdzie współczynniki $a, b, c, \ldots$ są liczbami całkowitemi i niektóre z nich mogą być zero, wyjąwszy d, e, f które razem nie mogą być zero, bo w tym razie i zrównanie przestałoby być drugiego, zamieniające się na zrównanie pierwszego stopnia.

Jak zwyczajnym warunkiem rozwiązania zagadnień nieoznaczonych prowadzących do zrównania lub zrównań pierwszego stopnia była znalezienie wartości niewiadomych w liczbach całkowitych i dodatnych, tak w zadaniach nieoznaczonych prowadzących do zrównań drugiego stopnia, zakłada się najczęściej warunek wyznaczenia wartości niewiadomych w liczbach wymiernych. Skoro zaś dodaje się warunek iżby te wartości były liczbami całkowitemi, rozwiązanie takie staje się o wiele trudniejszem niż pod warunkiem pierwszym. W następnem pokaże się tak jedno jak drugie.

Pokażmy naprzód że napoczątku założone zrównanie sprowadzić można do trzech wyrazowego. Rozwiązawszy to zrównanie według y, znajdziemy

$$y=-\frac{ex+c}{2f}\pm\frac{1}{2f}\sqrt{(c^2-4af)+(2ce-4bf)x+(e^2-4df)x^2}$$

albo $$2fy+ex+c=\sqrt{(c^2-4af)+(2ce-4bf)x+(e^2-4df)x^2}$$

Położywszy $c^2-4af=\alpha$, $2ce-4bf=\beta$, $e^2-4df=\gamma$, będzie

$$2fy+ex+c=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

Z tego napisania zrównania pokazuje się że warunek rozwiązania zrównania założonego w liczbach wymiernych, sprowadza się do wyznaczenia wartości x tak iżby trójmian $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ był dokładnym kwadratem. Położywszy teraz $2fy+ex+c=t$, będzie też $\alpha+\beta x+\gamma x^2=t^2$. Rozwiązawszy znowu to ta zrównanie według x, otrzymamy jak wyżej

$$2\gamma x+\beta = \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\gamma t^2}$$

Kładąc naprzód $4\gamma=A$, zaś $\beta^2-4\alpha\gamma=B$, będzie

$$2\gamma x+\beta=\sqrt{At^2+B}$$

i sprowadza się całe zadanie do wyznaczenia nieznanej t tak żeby dwumian At^2+B był dokładnym kwadratem, lub, co na jedno wychodzi, jeśli położymy

$$2\gamma x+\beta=u$$

otrzymamy trzy wyrazowe zrównanie

$$u^2=At^2+B \text{ albo } u^2-At^2=B$$

jak z początku powiedziano. Każde przeto zrównanie drugiego stopnia między dwiema nieznanemi, sprowadzić można do zrównania postaci ostatniej i rozwiązanie pierwiastkowego ogólnego, sprowadza się do rozwiązania tego tu ostatniego.

§ 3. Nim Lagranż nauczył rozwiązać ostatnie zrównanie w całej ogólności, uciekano się do rozmaitych wybiegów matematycznych aby takowe rozwiązać przynajmniej w liczbach wymiernych. Najwięcej i najprostszych sposobów podał genijalny Euler a potem i wielu innych Matematyków.

Myślę że nie będzie bez korzyści uczyć się podać tu naprzód rzeczone różne wybiegi, a zakończyć sposobem Lagranża, bo w wielu przypadkach te wybiegi prędzej nas zaprowadzą do celu niż ogólny chociaż zawsze pewny sposób Lagranża.

Widzieliśmy wyżej że rozwiązanie pierwotnego zrównania sprowadziliśmy do wyznaczenia wartości x tak żeby trójmian $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ był dokładnym kwadratem; zaczniemy tu jednak od prostszych wyrażeń.

Jeśli mamy zrównanie $y=\sqrt{a+bx}$ a chcemy znaleźć wartość na x tak żeby y było wymiernem natenczas dość położyć $a+bx=t^2$ skąd $x=\frac{t^2-a}{b}$, gdzie t mieć może każdą dowolną wartość i jak widzimy żadnej tu niemasz trudności.

§ 4. Jeśli $y=\sqrt{a+bx^2}$ i chcemy to zrównanie rozwiązać w liczbach wymiernych, tedy to już jest trudniejszem a nawet czasem bardzo trudnem a często niepodobnem. Ponieważ to zrównanie, najpierw przy jego następnie $y^2=a+bx^2$ należy do tych jakie wyżej otrzymaliśmy z ogólnego t. j. $u^2-At^2=B$, ponieważ jest pewny i niezawodny sposób rozwiązania takowego, jeśli rozwiązanie być może, zatem poprzestaniemy ten przypadek do dalszego ciągu, tu wskażemy kilka na zrównaniu $y=\sqrt{7+2x^2}$ jakich wybiegów dawniej używano.

Znając jakąkolwiek wartość x czyniącą dwumian $7+2x^2$ dokładnym kwadratem, za jej pomocą możemy znaleźć nieskończoną liczbę rozwiązań. I tak widzimy że $x=1$, daje $7+2x^2=9$ która liczba jest kwadratem. Podobnież $x=3$ czyni $7+2x^2=25$ także dokładnym kwadratem. Biorąc pierwszą wartość na x, położymy $x=z+1$ (biorąc drugą, położylibyśmy $x=z+3$) i tedy otrzymamy

$\sqrt{7+2x^2}=\sqrt{7+2z^2+4z+2}=\sqrt{9+4z+2z^2}$. Wprowadzając teraz nową nieoznaczoną np. t, położymy $\sqrt{9+4z+2z^2}=tz+3$ a znajdziemy

$9+4z+2z^2=t^2z^2+6tz+9$ albo $4+2z=t^2z+6t$ skąd $z=\frac{6t-4}{2-t^2}$ a następnie

$$x=z+1=\frac{6t-4}{2-t^2}+1=\frac{6t-t^2-2}{2-t^2}.$$

Jeśli teraz za t kłaść będziemy dowolne liczby, za każdą razą otrzymamy x takie że y będzie wymiernem. I tak, położywszy $t=2$ będzie $x=-3$, a $y=\sqrt{7+2x^2}=5$. Położywszy zaś $t=8$, znajdzie się $x=\frac{9}{31}$ a $y=\frac{83}{31}$. Położywszy $t=\frac{1}{2}$, a znajdziemy $x=\frac{3}{7}$ zaś $y=\frac{19}{7}$. Lecz, ponieważ już wspomnieliśmy że podobne zrównania rozwiązywać będziemy w dalszym ciągu, nie zatrzymujemy się więcej nad tym przypadkiem. To jednak tu muszę powiedzieć że gdyby było $a=1$ i $b=1$, rozwiązanie zrównania $y=\sqrt{1+x^2}$ w liczbach całkowitych jest niemożebnem; w liczbach zaś wymiernych lecz ułamkowych

jest takiem i prowadzi do ważnych wypadków, dlaczego pominąć tego przypadku nie mogę. ~~Chcąc~~

Chcąc otrzymać rozwiązanie zrównania $y=\sqrt{1+x^2}$ w liczbach ułamkowych, połóżmy $\sqrt{1+x^2}=x+\frac{p}{q}$ a znajdziemy $1+x^2=x^2+2\frac{p}{q}x+\frac{p^2}{q^2}$ skąd $x=\frac{q^2-p^2}{2pq}$ a następnie $1+x^2=\frac{4p^2q^2+q^4-2p^2q^2+p^4}{4p^2q^2}=\frac{(q^2+p^2)^2}{4p^2q^2}$ t. j. $y=\frac{q^2+p^2}{2pq}$ a zatem y wymierne. Kładąc za p i q dowolne liczby, otrzymamy zawsze wypadek wymierny. Ponieważ $1+x^2=\frac{(q^2+p^2)^2}{(2pq)^2}$ ~~skąd $x^2=$~~ [illegible] a wyżej znaleźliśmy $x^2=\frac{(q^2-p^2)^2}{(2pq)^2}$, więc odejmując drugie zrównanie od pierwszego, otrzymamy $(2pq)^2+(q^2-p^2)^2=(q^2+p^2)^2$. To zrównanie uczy nas znaleźć dwie liczby takie których suma kwadratów jest także kwadratem. I tak gdyby nam danem było zrównanie $x^2+y^2=t^2$ do rozwiązania, tedy dosyć jest położyć $x=2pq$ a $y=q^2-p^2$, bo wtedy będzie $t=q^2+p^2$. Tak np. położywszy $p=2$, $q=5$, będzie $x=20$, $y=21$ a $t=29$ i jest $20^2+21^2=29^2$.

(Z powyższego zrównania wypada także

$$(q^2+p^2)^2-(2pq)^2=(q^2-p^2)^2$$

które znowu podaje ~~przed~~ znalezienia dwóch liczb takich iżby różnica ich kwadratów była także kwadratem. Niech bowiem danem będzie zrównanie $x^2-y^2=t^2$, tedy dość jest położyć $x=q^2+p^2$ a $y=2pq$, ~~by~~ by się otrzyma $t=q^2-p^2$. Jakoż położywszy znowu $p=2$ a $q=3$, będzie $x=13$, $y=12$ a $t=5$, zaś $13^2-12^2=5^2$.

Zrównanie $y=\sqrt{1+x^2}$ można też i następnie rozwiązać, ale tylko w liczbach wymiernych. Położywszy $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{p}{q}x$ będzie $1+x^2=1+\frac{2p}{q}x+\frac{p^2}{q^2}x^2$ skąd $x=\frac{2pq}{q^2-p^2}$ przez co będzie $1+x^2=\frac{(q^2-p^2)^2+(2pq)^2}{(q^2-p^2)^2}=\frac{(q^2+p^2)^2}{(q^2-p^2)^2}$ t. j. dwumian $1+x^2$ jest dokładnym kwadratem. Połóżmy ~~np.~~ $q=5$ a $p=3$, tedy $x=\frac{30}{16}$, ~~zaś~~ $1+x^2=\frac{1156}{256}$ zaś $y=\frac{34}{16}$.

Tu też rozwiązać można następujące zadanie

(Do kwadratu 72^2 dobrać liczbę taką, iżby ~~suma~~ suma kwadratów obu liczb była znowu kwadratem. Oznaczywszy szukaną liczbę przez x a kwadrat szukany przez s^2, mamy rozwiązać zrównanie $72^2+x^2=s^2$. Z tego zrównania mamy $x=\sqrt{s^2-72^2}$. Że s większem być musi niż x, więc połóżmy $\sqrt{s^2-72^2}=s-t$, skąd $s^2-72^2=s^2-2ts+t^2$ a następnie $s=\frac{72^2+t^2}{2t}=\frac{72^2}{2t}+\frac{t}{2}$ a zaś $x=s-t=\frac{72^2}{2t}-\frac{t}{2}$

Tak z wartości x jako też i wartości s czytamy, że jeżeli x i s mają być liczbami całkowitemi, tedy naprzód nie można za dowolną t kłaść innych liczb całkowitych tylko parzyste, a potem że te parzyste liczby powinny być dokładnemi dzielnikami liczby 72. Znalazłszy więc dokładne dzielniki parzyste liczby 72, znajdziemy też i rozwiązania zadania. I tak parzystemi dzielnikami liczby 72 są: 72, 36, 24, 18, 12, 8, 6, 4, 2, więc kładąc jeden po drugim za t, znajdziemy:

dla $t=72$, $x=0$, $s=72$, i jest też rzeczywiście $72^2+0^2=72^2$
$t=36$ - - $x=54$, $s=90$ - - - - - - - - $72^2+54^2=90^2$
$t=24$ - - $x=96$, $s=120$ - - - - - - - - $72^2+96^2=120^2$
$t=18$ - - $x=135$, $s=153$ - - - - - - - - $72^2+135^2=153^2$ 135^2
$t=12$ - - $x=210$, $s=222$ - - - - - - - - $72^2+210^2=222^2$
$t=8$ - - $x=320$, $s=328$ - - - - - - - - $72^2+320^2=328^2$
$t=6$ - - $x=429$, $s=435$ - - - - - - - - $72^2+429^2=435^2$
$t=4$ - - $x=646$, $s=650$ - - - - - - - - $72^2+646^2=650$
$t=2$ - - $x=1295$, $s=1297$ - - - - - - - - $72^2+1295^2=1297^2$

Oprócz tych niema więcej rozwiązań w liczbach całkowitych podanego zadania.

§5. Chcąc zaoszczędzić starań, po których byśmy na pierwszy rzut oka poznać można czy dany dwumian $a+bx^2$ może lub nie może być dokładnym kwadratem, należałoby zastanowić się nad różnemi kształtami liczb całkowitych, a jako próbę tego podaję tylko trzy następujące. Każda liczba całkowita, wystawioną być może pod jedną z postaci $3n$, $3n+1$ i $3n+2$ co znaczy, że każda liczba albo jest dokładnie podzielną przez 3, lub też podzielona przez 3 zostawia na reszcie 1 lub 2. Kwadraty tych ogólnie wyrażonych liczb są: $9n^2$; $9n^2+6n+1$ i $9n^2+12n+4$. Pierwszy z tych kwadratów podzielnym jest nie tylko przez 3 ale także i przez 9; drugi i trzeci podzielone przez 3 pozostawiają każdy na reszcie 1; skąd się pokazuje, że kwadraty są tylko dwojakiego gatunku, mianowicie: jedne są dokładnie podzielne przez 3 i 9 a drugie podzielone przez 3, zostawiają resztę 1, a dla tego łatwo po tych kształtach osądzić czyli liczba $a+bx^2$ jest dokładnym kwadratem. I tak, od razu przewidzieć można, że dwumian $3x^2+2$, nigdy nie może być dokładnym kwadratem bo podzielony przez 3 zostawia na reszcie 2. Lecz mówiłyśmy jednak zdawało się dla x ułamkowego, rzeczony dwumian może być dokładnym kwadratem. Aby się i w tym razie o niemożebności przekonać połóżmy $x=\frac{p}{q}$ [illegible] otrzymamy $\frac{2+3\frac{p^2}{q^2}}{a+b\frac{p^2}{q^2}}$. Ponieważ kwadrat rozmnożony przez inny kwadrat daje na iloczyn także kwadrat, więc $\cancel{q^2(a+b\frac{p^2}{q^2})=aq^2+bp^2}$. $q^2(2+3\frac{p^2}{q^2})=2q^2+3p^2$ powinno być dokładnym kwadratem jeżeli $2+3\frac{p^2}{q^2}$ nim jest. Lecz ostatni iloczyn wtedy tylko mógłby być dokładnym kwadratem, gdyby q podzielnem było bez reszty przez 3. Ale jeżeli q podzielnem jest przez 3, to p nie jest przez tę liczbę podzielnem jako liczba pierwsza z q i przeto położywszy ~~[illegible]~~ $q=3k$, znajdziemy $2q^2+3p^2=18k^2+3p^2$ a ten dwumian nie jest podzielnym przez 9 coby być powinno, gdyby $2q^2+3p^2$ mogło być dokładnym kwadratem. Jeżeli zaś q nie jest podzielnem przez 3, natenczas dwumian $2q^2+3p^2$ podzielony przez 3 pozostawia resztę 2, z powodu że $\frac{q^2}{3}$ pozostawia resztę 1, więc $\frac{2q^2}{3}$ pozostawi 2. Kiedy więc, według powyższego, $3p^2+2q^2$ nie może być kwadratem, więc i dwumian $3x^2+2$ nie może dla żadnej wartości x być dokładnym kwadratem. Tym samym zupełnie sposobem (pokazać można) że dwumiany $3x^2+5$, $3x^2+8$, $3x^2+11$, $3x^2+14$ i t.d. a w ogólności dwumian $3x^2+(3n+2)$ nie może być kwadratem dla żadnej wartości x, bo liczby 5, 8, 11, 14 …. $(3n+2)$ które podzielone przez 3, zostawia na reszcie 2. [Z przeprowadzonego tu dowodu dla liczby 3, wnieśiemy że wymależenie zamierzonej skarbu, należy do podzielności liczb i że chcąc takową znaleźć potrzebaby poddać powyższemu podobnemu roztrząsaniu rozmaite kształty liczb całkowitych, czego (sposobu) powiedziałem, nie potrzebujemy, gdyż się nauczymy w dalszym ciągu rozwiązania porównania drugiego stopnia i z tego powodu to co o dzielniku 3 powiedziałem, posłużyć może za wskazówkę jakby postępować należało gdyby ~~[illegible]~~ sposób rozwiązania porównania drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi, nie był znanym.

Fgdzie p i q są pierwszemi między sobą

§6. Gdybyśmy mieli do rozwiązania porównanie $v=\sqrt{x^2+ay^2}$, co znaczy że chcemy znaleźć wartości na x i y takie, żeby dwumian pod znakiem pierwiastkowym był dokładnym kwadratem, czyli żeby v było wymiernem, tedy, ponieważ to odpowiada przypadkowi, w którym dwumian $a+z^2$ dokładnym kwadratem, tego zaś bardzo łatwo dokażemy kładąc $\sqrt{a+z^2}=z+t$, $a+z^2=z^2+2tz+t^2$, skąd $z=\frac{a-t^2}{2t}$, albo $z=\frac{aq^2-p^2}{2pq}$, skoro położymy $t=\frac{p}{q}$ więc kładąc teraz $z=\frac{x}{y}$, będzie $a+z^2=\frac{x^2+ay^2}{y^2}$. Dość tu więc jest położyć $x=aq^2-p^2$ a $y=2pq$, gdyż otrzymamy $v=\sqrt{x^2+ay^2}=\sqrt{(aq^2-p^2)^2+4ap^2q^2}=p^2+aq^2$. Kładąc teraz za p i q dowolne liczby, otrzymamy v zawsze wymierne. Tak niech będzie $v=\sqrt{x^2+7y^2}$; położywszy $p=2$ a $q=3$, będzie $x=59$ a $y=12$. Jest też rzeczywiście $\sqrt{x^2+7y^2}=\sqrt{59^2+7.12^2}=67$. Położywszy zaś $p=1$ a $q=2$ znajdziemy $\sqrt{x^2+7y^2}=\sqrt{27^2+7.4^2}=29$. Połóżmy jeszcze $p=\frac{1}{2}$ a $q=\frac{2}{3}$, a znajdziemy $x=\frac{103}{36}$, $y=\frac{2}{3}$ zaś $\sqrt{x^2+7y^2}=\sqrt{(\frac{103}{36})^2+7(\frac{2}{3})^2}=\frac{121}{36}$ i t.d.

§7. Przypadek który co dopiero rozwiązaliśmy, mianowicie $v=\sqrt{x^2+ay^2}$, można jeszcze i następnie rozwiązać. Ponieważ, jak wiadomo

$$x^2+ay^2=(x+y\sqrt{a}\sqrt{-1})(x-y\sqrt{a}\sqrt{-1}),$$

położywszy zatem $x+y\sqrt{a}\sqrt{-1}=m(p+q\sqrt{a}\sqrt{-1})^2$

$x-y\sqrt{a}\sqrt{-1}=m(p-q\sqrt{a}\sqrt{-1})^2$ skąd $x^2+ay^2=m^2(p^2+aq^2)^2$, a następnie $v=\sqrt{x^2+ay^2}=m(p^2+aq^2)$, otrzymamy widocznie v wymierne.

Dla znalezienia wartości x i y czyniących v wymiernem mamy

$$x+y\sqrt{a}\sqrt{-1}=mp^2-amq^2+2mpq\sqrt{a}\sqrt{-1}$$
$$x-y\sqrt{a}\sqrt{-1}=mp^2-amq^2-2mpq\sqrt{a}\sqrt{-1}$$

przeto
$$x = mp^2-amq^2=m(p^2-aq^2)$$
$$y = 2mpq$$

Kładąc teraz za m, p, q dowolne liczby, zawsze otrzymamy v wymierne.

Na sposób powyższego, rozwiązać też można następujące równanie $v=\sqrt{ax^2+by^2}$ w liczbach wymiernych. Gdyż bowiem $ax^2+by^2=(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}\sqrt{-1})(x\sqrt{a}-y\sqrt{b}\sqrt{-1})$,

zatem położywszy $x\sqrt{a}+y\sqrt{b}\sqrt{-1}=(m\sqrt{a}+n\sqrt{b}\sqrt{-1})(p+q\sqrt{ab}\sqrt{-1})$

$x\sqrt{a}-y\sqrt{b}\sqrt{-1}=(m\sqrt{a}-n\sqrt{b}\sqrt{-1})(p-q\sqrt{ab}\sqrt{-1})$

otrzymamy: $ax^2+by^2 = (am^2+bn^2)(p^2+abq^2)$

a następnie $v=\sqrt{ax^2+by^2}=\sqrt{am^2+bn^2}\sqrt{p^2+abq^2}$

Jeśli teraz przez probowanie dobierzemy dwie liczby m i n takie żeby czyniły dwumian am^2+bn^2 dokładnym kwadratem, którego pierwiastkiem niech będzie r, t.j. że $\sqrt{am^2+bn^2}=r$, mieć będziemy $v=r\sqrt{p^2+abq^2}$ a to jest przypadek poprzedni, [na początku tego § rozważany;] położywszy zatem jak tamże, $p=abt^2-s^2$ a $q=2st$, gdzie s i t są dowolnemi liczbami całkowitemi, znajdziemy $v=r(abt^2+s^2)$. Wartości x i y znajdziemy ze zrównań

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{b}\sqrt{-1}=(mp-bnq)\sqrt{a}+(np+amq)\sqrt{b}\sqrt{-1}$$
$$x\sqrt{a}-y\sqrt{b}\sqrt{-1}=(mp-bnq)\sqrt{a}-(np+amq)\sqrt{b}\sqrt{-1}$$

następujące $x=mp-bnq$, $y=np+amq$

Niech daném będzie równanie $v=\sqrt{4x^2+5y^2}$, tedy położywszy $m=1$, $n=3$, znajdziemy $\sqrt{am^2+bn^2}=\sqrt{4.1^2+5.3^2}=7=r$, będzie więc $p=20t^2-s^2$ a $q=2st$, przeto $x=p-15q=20t^2-s^2-30st$, zaś $y=3p+4q=60t^2-3s^2+8st$ [$abt^2-s^2=$]

Dla tych wartości, biorąc, jak się powiedziało, dowolne liczby całkowite, otrzymamy za każdym razem v wymierne. I tak: biorąc $s=1$ i $t=1$, będzie $x=-11$ a $y=65$ zaś $\sqrt{4.11^2+5.65^2}=\sqrt{21609}=147$.

Gdyby było do rozwiązania $v=\sqrt{3x^2+13y^2}$, tedy widzimy że ten dwumian dla $x=1$ i $y=1$ jest dokładnym kwadratem, przeto według naszego znakowania $m=1$ i $n=1$ zaś $x=p-13q$ a $y=p+3q$. Ale w obecnym przykładzie $p=abt^2-s^2=39t^2-s^2$, zaś $q=2st$, zatem $x=39t^2-s^2-26st$ a $y=39t^2-s^2+6st$, a następnie np. dla $s=1$ i $t=1$, $x=12$, $y=44$. Przeto widocznie też $v=\sqrt{3x^2+13y^2}=\sqrt{3.12^2+13.44^2}=\sqrt{25600}=160$.

Rozwiązanie równania $x^2+y^2=z^2$ w liczbach całkowitych i dodatnich.

§ 8. Rozwiązanie równania matematycznego wybiegu, podaném było w piśmie „Nouvelles Annales de mathématiques" tom XI stron. 21 z r. 1852, a to jest następujące: położywszy $x=u+v$, $y=u+w$ a $z=u+v+w$, znajdziemy $u^2=2vw$. Ponieważ kwadrat z liczby nieparzystej jest także nieparzystą liczbą a u^2 jest liczbą parzystą, więc kładąc za u dowolne liczby ale tylko parzyste potrzeba u^2 rozłożyć na dwa czynniki z których jeden zawsze będzie parzystym, naznaczając połowę parzystego czynnika i drugi czynnik są wartościami

dwóch niewiadomych v i w; a ponieważ jest tym sposobem znane i u, więc łatwo znajdziemy także x, y, z. Tak np. połóżywszy $u=18$ mamy $18^2=324=36.9$, zatem $v=\frac{36}{2}=18$ a $w=9$, a z temi wartościami będzie $x=u+v=18+18=36$, $y=18+9=27$ a $z=18+18+9=45$; to też jest rzeczywiście $36^2+27^2=45^2$. Podobnież, połóżywszy $u=6$, będzie $36=4.9$, zatem $v=2$ a $w=9$, zaś $x=8$, $y=15$, $z=$ ~~29~~ 17 jakoż

~~8^2+16^2~~ $8^2+15^2=17^2$.

W r. 1859, podał J. B. Sturm, jak wyczytałem w „Archiv der Mathematik" wydawanem przez Grunerta w Greifswald w tomie XXXIII na stron. 92, może jeszcze łatwiejszy sposób rozwiązania zatrudniającego nas tu zrównania. Według niego dosyć położyć $x=2n+1$, $y=2n(n+1)$ a $z=2n(n+1)+1$ i biorąc za n każdą liczbę całkowitą i dodatnią, aby za każdym razem otrzymać rozwiązanie w mowie będącego zrównania; bo każda nieparzysta liczba może być rozłożoną na różnicę ~~kw~~ dwóch kwadratów, ~~np~~ $2p+1=(p+1)^2-p^2$, będzie zaś liczba $2p+1$ sama kwadratem, jeżeli jej położymy $2p+1=(2n+1)^2$, skąd wypada $p=2n(n+1)$ ~~+1~~ a następnie $(2n+1)^2=\{2n(n+1)+1\}^2-\{2n(n+1)\}^2$, t. j.

$$(2n+1)^2+\left\{\frac{4n(n+1)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{4n(n+1)}{2}+1\right\}^2.$$

§9. Z podobnych zrównań nieoznaczonych weźmy jeszcze podane w „Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem et Gerono" w tomie IX na stron. 11

$$x^2+y^2-1=u^2$$
$$x^2-y^2-1=v^2$$

które usiłujmy rozwiązać w liczbach wymiernych. Odejmując drugie od pierwszego zrównania, znajdziemy $2y^2=u^2-v^2$, a położywszy $y=pq$, będzie $u^2-v^2=(u+v)(u-v)=2p^2q^2$, a dla tego można położyć $u+v=2p^2$ a $u-v=q^2$, z których zrównań wypada $u=\frac{2p^2+q^2}{2}$ a $v=\frac{2p^2-q^2}{2}$. Włożone wartości y, u, v w pierwsze z danych zrównań, daje

$$x^2+p^2q^2-1=\left(\frac{2p^2+q^2}{2}\right)^2, \text{ skąd } x^2=\frac{q^4+4p^4+4}{4}.$$

Warunkiem żeby x^2 było dokładnym kwadratem, albo x wymiernem jest, żeby było $4p^4=4q^2$ t. j. żeby było $q=p^2$ ~~$p^2=q$~~ z którego warunku znajdziemy

$$x^2=\frac{p^8+4p^4+4}{4}=\left(\frac{p^4+2}{2}\right)^2$$

zatem $x=\frac{p^4+2}{2}=1+\frac{p^4}{2}$

Z tą wartością x otrzymamy także

$$y=p^3,\quad u=p^2+\frac{p^4}{2} \text{ a } v=p^2-\frac{p^4}{2}$$

Każda wymierna liczba położona tu za p, da nam wartości x, y, u, v rozwiązujące założone zrównania w liczbach takich wymiernych. I tak: wziąwszy $p=2$, znajdziemy $x=9$, $y=8$, $u=12$ a $v=-4$. Jest też rzeczywiście

$$81+64-1=144$$
$$81-64-1=16$$

§10. Ale przyjdźmy już do naszego trójmianu $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ i zobaczmy jak postępowano żeby go uczynić dokładnym kwadratem. ~~Aże się już [illegible] wyżej [illegible] najmniejszy przypadek ta być może tylko dla x ułamkowego, zatem połóżmy $x=\frac{y}{z}$ gdzie y i z są [illegible] liczbami, a otrzymamy~~

~~$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=\frac{\alpha z^2+\beta yz+\gamma y^2}{z^2}$$~~

~~Jeżeli więc $\frac{y}{z}$ czyni trójmian $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ dokładnym kwadratem, natenczas i trójmian $\alpha z^2+\beta yz+\gamma y^2$ jest również dokładnym kwadratem, a to co dotąd powiedziano, posłuży nam do znalezienia całkowitych wartości na y i z czyniących ostatni trójmian kwadratem.~~ Może tu być kilka przypadków z których jednak tylko najprostsze, a następnie najczęściej używane przytoczę.

Pierwszy przypadek. W przedłożonym trójmianie, może być γ liczbą kwadratową tak że $\gamma=k^2$. W takim razie połóżywszy $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\sqrt{\alpha+\beta x+k^2x^2}=$ kx

będzie $\alpha+\beta x+k^2x^2=k^2x^2+2ktx+t^2$ skąd $x=\frac{t^2-\alpha}{\beta-2kt}$, a ta wartość położona za x, czyni trójmian dokładnym kwadratem, kładąc za t położymy dowolne liczby. Tak np. jeżeli trójmian $2+5x+9x^2$ chcemy uczynić ~~kwa~~ dokładnym kwadratem, ~~wymiernym~~ ponieważ $k=3$, znajdziemy $x=\frac{t^2-2}{5-6t}$; kładąc tu $t=2$, otrzymamy $x=-\frac{23}{25}$ którą wartość położywszy za x znajdziemy rzeczywiście $\sqrt{2-6\frac{23}{25}+9\left(\frac{23}{25}\right)^2}=\frac{56}{25}$.

Drugi przypadek. Może się też wydarzyć że α jest dokładnym kwadratem, tak że $\alpha=a^2$. W takim razie dość położyć $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\sqrt{a^2+\beta x+\gamma x^2}=a+tx$, znajdziemy bowiem $a^2+\beta x+\gamma x^2=a^2+2atx+t^2x^2$ skąd $x=\frac{\beta-2at}{t^2-\gamma}$, w której wartości położyć można za t dowolne liczby. I tak: niechby w trójmianie $4+7x+3x^2$ potrzeba znaleźć wartość na x któraby go uczyniła ~~wymiernym~~ dokładnym kwadratem, tedy ponieważ $a=2$, zatem $x=\frac{7-4t}{t^2-3}$; a wziąwszy $t=3$, będzie $x=-\frac{5}{6}$ zaś $\sqrt{4-7\cdot\frac{5}{6}+3\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Gdybyśmy w tym tu przypadku położyli $x=\frac{y}{z}$, tedy wypadnie $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\sqrt{a^2+\beta\frac{y}{z}+\gamma\frac{y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{a^2z^2+\beta yz+\gamma y^2}}{z}$, co nas uczy że każdy trójmian postaci $a^2z^2+\beta yz+\gamma y^2$ może być uczyniony dokładnym kwadratem; dosyć bowiem położyć $y=\beta-2at$ a $z=t^2-\gamma$ i biorąc potem za t dowolne liczby. Tak np. w trójmianie $9z^2+7yz+3y^2$, skoro położymy $t=1$, wypadnie $y=7-6=1$, $z=1-3=-2$ a zaś

$$\sqrt{9z^2+7yz+3y^2}=\sqrt{9.4-7.2+3.1^2}=6$$

Jeden tu jeszcze przypadek zasługuje na uwagę, mianowicie gdy $\alpha=0$ i jest żądanie dwumian $\beta x+\gamma x^2$ uczynić ~~wymiernym~~ dokładnym kwadratem. Wtedy bowiem dla znalezienia takiej wartości na x, dość jest położyć $\sqrt{\beta x+\gamma x^2}=tx$, bo wypadnie $\beta x+\gamma x^2=t^2x^2$ skąd $x=\frac{\beta}{t^2-\gamma}$. Tak np. zamierzmy sobie znaleźć wszystkie liczby trójkątne, które zarazem są liczbami kwadratowemi. Z Algebry mojej „dział II" gdzie jest mowa o szeregach, wiadomo że ogólne wyrażenie każdej liczby trójkątnej jest $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{x^2+x}{2}=\frac{2x^2+2x}{4}$ F. Otóż widzimy że potrzeba znaleźć takie wartości na x, żeby dwumian $2x^2+2x$ był dokładnym kwadratem. Połóżmy więc $2x^2+2x=t^2x^2$, a otrzymamy $x=\frac{2}{t^2-2}$. (Z tego wyrażenia widzimy że dla wartości t całkowitych, wypadnie x zawsze ~~[illegible]~~ ułamkowe lub odjemne); dla $t=1$ przeciwnie dla liczb ułamkowych, wartości na x mogą być całkowite i dodatne. ~~[illegible]~~ Aże nam chodzi o to, żeby x było całkowitem i dodatnem jako skarbówka, a dla tego biorąc np. $t=\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}$ i t. d. znajdziemy w tym samym porządku

$x=8, -50, 49, 288$ co znaczy że liczby trójkątne ósma, 49ta i 288a są takie kwadratami, wyłączając liczbę 50 jako odjemną. Same liczby są:

$$\frac{x(x+1)}{2}=\frac{8.9}{2}=4.9=2^2.3^2$$
$$=\frac{49.50}{2}=49.25=7^2.5^2$$
$$=\frac{288.289}{2}=144.289=12^2.17^2$$

F gdzie x wyraża skarbówkę, czyli miejsce jakie liczba zajmuje w szeregu liczb trójkątnych.

Trzeci przypadek. Jeżeli ani γ ani α nie są liczbami kwadratowemi, to jednak może się jeszcze wydarzyć że trójmian $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ da się rozłożyć na dwa czynniki wymierne. Ale że te czynniki nie są inne jak czynniki pierwiastkowe równania $x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma}=0$ z którego wypada $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma}$ zatem też czynniki wtedy tylko mogą być wymiernemi gdy $\beta^2-4\alpha\gamma$ jest dokładnym kwadratem. Położywszy więc $\beta^2-4\alpha\gamma=h^2$, rzeczone czynniki będą $x+\frac{\beta+h}{2\gamma}$ i $x+\frac{\beta-h}{2\gamma}$ tak że $\alpha+\beta x+\gamma x^2=\gamma\left(x+\frac{\beta+h}{2\gamma}\right)\left(x+\frac{\beta-h}{2\gamma}\right)$. Połóżmy jeszcze dla krótkości $\frac{\beta+h}{2\gamma}=p$ a $\frac{\beta-h}{2\gamma}=q$, będzie $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\sqrt{\gamma(x+p)(x+q)}$.

Po takiem rozłożeniu trójmianu na czynniki, połóżmy

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \sqrt{\gamma(x+p)(x+q)} = t(x+p) \text{ skąd otrzymamy}$$

$$\gamma(x+p)(x+q) = t^2(x+p)^2 \text{ czyli } \gamma(x+q) = t^2(x+p) \text{ t. j. } x = \frac{t^2p-\gamma q}{\gamma-t^2}$$

Z tej wartości x, otrzymamy

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = t(x+p) = \frac{t(p-q)}{\gamma-t^2} = \frac{ht}{\gamma-t^2} \text{ bo } p-q = \frac{h}{\gamma}$$

Tak np. gdyby żądano znaleźć wartość na x taką, żeby trójmian $5+14x+8x^2$ był ~~[illegible]~~ dokładnym kwadratem, tedy $\alpha=5$, $\beta=14$, $\gamma=8$; ponieważ $\beta^2-4\alpha\gamma=36$, więc $h=6$ a następnie $p=\frac{5}{4}$, $q=\frac{1}{2}$, przeto $x=\frac{5t^2-16}{32-4t^2}$. Włóżmy tu $t=2$, znajdziemy $x=\frac{1}{4}$ a zarazem $\sqrt{5+14x+8x^2}=\frac{6}{2}=3$.

Szukajmy liczb posiadających tę własność, że podwojony ich kwadrat zmniejszony o 2, powstaje więc zupełną liczbę kwadratową. Każdą taką liczbę oznaczmy przez x a zupełną potęgę przez y^2, mamy do rozwiązania równanie

$$y^2 = 2x^2-2 = 2(x^2-1) = 2(x+1)(x-1)$$

Dość więc położyć $y=\sqrt{2(x+1)(x-1)}=t(x+1)$, skąd się znajdzie $x=\frac{t^2+2}{2-t^2}$ gdzie zaś t można wziąć każdą od upodobania liczbę, lubo nie każda dla wypadku całkowite ... Włóżmy $t=\frac{3}{2}$, będzie $x=\frac{17}{-1}=-17$ a $2.17^2-2=24^2$; położymy $t=\frac{14}{10}$ a znajdziemy $x=99$ zaś $2.99^2-2=140^2$ i t. d.

Czwarty i ostatni przypadek (z) który tu uważać zamierzam, jest ten jeżeli bez wielkiego nakładu i próbowania zgadujemy wartość na x taką, że trójmian $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ czyni ~~[illegible]~~ dokładnym kwadratem wtedy, jak to już przy dwumianie $a+bx^2$ uważałem, przy pomocy tej wartości znaleźć można nieskończoną liczbę innych. I tak: jeżeli dla $x=k$ jest $\alpha+\beta k+\gamma k^2=h^2$, położmy $x=z+k$ a otrzymamy $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\sqrt{h^2+(\beta+2k\gamma)z+\gamma z^2}$ t. j. przerobiliśmy nasz trójmian na inny, w którym tak jak w drugim widzieliśmy przypadku, α jest dokładnym kwadratem, przeto połóżmy

$$\sqrt{h^2+(\beta+2k\gamma)z+\gamma z^2} = h+tz \text{ będzie } h^2+(\beta+2k\gamma)z+\gamma z^2 = h^2+2htz+t^2z^2$$

skąd $z=\frac{\beta+2k\gamma-2ht}{t^2-\gamma}$, a zaś $x=k+z=k+\frac{\beta+2k\gamma-2ht}{t^2-\gamma}=\frac{kt^2+\beta+k\gamma-2h...}{t^2-\gamma}$

gdzie zaś t dowolną liczbą. Tak np. trójmian $7+5x+2x^2$ dla $x=2$ jest dokładnym kwadratem, t. j. $7+5.2+2.2^2=25$ więc $k=2$ a $h=5$; będzie przeto dla

$x=\frac{9-10t+2t^2}{t^2-2}$ a dla $t=3$, $x=-\frac{3}{7}$. Z tej wartości na x mamy

$$\sqrt{7+5x+2x^2}=\sqrt{7-5.\tfrac{3}{7}+2\left(\tfrac{3}{7}\right)^2}=\frac{16}{7}.$$

§11. Ale już i dosyć tych chociaż jeszcze nie licznych wybiegów matematycznych, poprzednio branych dawniej dla rozwiązania równania drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi. Posłużyć one mogą ... tym się zastanawiać do jakich sposobów uciekano się przed Lagrangem do dopięcia zamierzonego celu, oraz mogą im następować inne wygodniejsze a nawet wytworniejsze. Takich sposobów znaleźć można wiele w Algebrze Eulera i w dziełach dawniejszych autorów. Zapominając na poprzednio przytoczonych oraz powstańcie usprawiedliwienie najpierw przytoczonego tego wyboczenia, powracam do równania na którem stanęliśmy, t. j. do równania drugiego stopnia wyprowadzonego i do postaci $u^2-At^2=B$ sprowadzonego, a w którem $u=2\gamma x+\beta$, $t=2fy+ex+c$, $-A=4\gamma$, $B=\beta^2-4\alpha\gamma$. Dalej jest $\alpha=c^2-4af$, $\beta=2ce-4bf$, $\gamma=e^2-4df$. Nareszcie $a, b, c \ldots f$ są współczynnikami równania ogólnego $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0$

Jakiekolwiek są liczby u i t w zrównaniu $u^2 = At^2 + B$ byle tylko wymierne, wystawić je sobie można jako sprowadzone do jednakowego mianownika; a dlatego położywszy $u = \frac{x}{z}$, $t = \frac{y}{z}$, pamiętając tylko że tu x i y mają inne niż w początkowem zrównaniu ważności, pierwsze zrównanie przejdzie na

$$x^2 - Ay^2 = Bz^2$$

które nam rozwiązać potrzeba i w którem x, y, z są pod postacią liczb całkowitych.

Nim do rozwiązania przystąpimy, zróbmy tu niektóre koniecznie potrzebne nad tem zrównaniem uwagi.

Pierwszą uwagą jest ta, iż trzy ilości x, y, z nie mają żadnego wspólnego dzielnika; gdyby go bowiem miały, dosyć jest przez niego podzielić całe zrównanie aby się go pozbyć.

Powtóre przypuścić można i należy, że dwie liczby A i B nie mają żadnego czynnika kwadratowego; gdyby bowiem było inaczej i np. $A = A'k^2$ a $B = B'\varkappa^2$, dosyćby było położyć $ky = y'$ a $\varkappa z = z'$ aby otrzymać zrównanie $x^2 - A'y'^2 = B'z'^2$ w którem żadna z liczb A' i B' nie ma czynnika kwadratowego.

Potrzecie, dwie którekolwiek z nieoznaczonych x, y, z, nie mają żadnego wspólnego dzielnika; przypuściwszy bowiem że δ^2 dzieli x^2 i y^2, dzieliłby też musiał ten dzielnik i z^2, co według pierwszej uwagi być nie może. Nie dzieli też i B według drugiej uwagi, zatem x i y są pierwszemi między sobą. Z tego samego powodu tak x i z, jako też y i z są pierwszemi między sobą.

Poczwarte, przypuścić jeszcze zawsze można że A i B są dodatnemi; bo biorąc z sobą różne znaki, otrzymamy tylko trzy ~~różne~~ następne połączenia $x^2 - Ay^2 = +Bz^2$, $x^2 - Ay^2 = -Bz^2$ i $x^2 + Ay^2 = +Bz^2$. Ale drugie z tych zrównań przechodzi w trzecie przez proste przestawienie wyrazów, trzecie zaś rozmnożywszy przez B, otrzymamy $Bx^2 + ABy^2 = B^2z^2$, a położywszy $AB = A'$ a $Bz = z'$ przechodzi na zrównanie $z'^2 - A'y^2 = Bx^2$ t. j. zrównanie pierwszej postaci.

Z tych uwag wnieśmy że pierwotne zrównanie drugiego stopnia z dwiema nieznanemi, zawsze sprowadzić można do postaci

$$x^2 - Ay^2 = Bz^2$$

w którem A i B są dodatnemi i wolne od czynnika kwadratowego, jakiby mieć mogły.

Dla rozwiązania tego zrównania podał Lagranż sposób zasadzający się na ciągłem zmniejszaniu współczynników A i B dopóty, dopóki jeden z nich nie stanie się $=1$, a w takim razie rozwiązanie odbywa się już za pomocą znajomych, a w ciągu działania przygotowanych wzorów. Bo rzeczywiście przypuśćmy żeśmy w ciągu rzeczonego zmniejszania współczynników A i B przyszli do zrównania $x^2 - y^2 = Bz^2$, albo do $x^2 - Ay^2 = z^2$, które ponieważ rządzą się tem samem zrównaniem bo są tejże samej postaci; ~~[illegible]~~ weźmy więc pierwsze t. j. $x^2 - y^2 = Bz^2$. Liczbę B rozłóżmy na dwa czynniki α i β które będą pierwszemi między sobą, bo B nie ma żadnego czynnika kwadratowego. Pomyślmy sobie także z rozłożone na dwa czynniki p i q tak że $z = pq$, tedy to zrównanie napisać można

$$(x+y)(x-y) = \alpha\beta p^2 q^2$$

a następnie wziąść $x + y = \alpha p^2$, $x - y = \beta q^2$ skąd $x = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2}{2}$ a $y = \frac{\alpha p^2 - \beta q^2}{2}$, $z = pq$

Tym sposobem wartości x, y, z są wyrażone przez dwie nieoznaczone [dowolne] p i q które gdyby były tak obrane iżby ~~to liczniki~~ wartości x i y były liczbami nieparzystemi, dosyć jest wszystkie wyrazy rozmnożyć przez 2, a otrzymamy $x = \alpha p^2 + \beta q^2$; $y = \alpha p^2 - \beta q^2$; $z = 2pq$.

Że liczba B często w rozmaity sposób może być rozłożona na dwa czynniki, zatem też rozmaite wzory otrzymamy na rozwiązanie tegoż równania. Niechby np. było równanie $x^2 - y^2 = 50z^2$, tedy, ponieważ $50 = 1.50 = 2.25 = 5.10$, otrzymamy rzeczone wzory jak następujące

$$x = p^2 + 50q^2 \qquad y = p^2 - 50q^2 \qquad z = 2pq$$
$$x = 2p^2 + 25q^2 \qquad y = 2p^2 - 25q^2 \qquad z = 2pq$$
$$x = 5p^2 + 10q^2 \qquad y = 5p^2 - 10q^2 \qquad z = 2pq$$

Biorąc potem za p i q dowolne liczby całkowite, otrzymamy jak widzimy nieskończoną liczbę rozwiązań równania $x^2 - y^2 = 50z^2$ także w liczbach całkowitych.

§12. Ale powróćmy do naszego równania $x^2 - Ay^2 = Bz^2$. Nie szkodząc ogólności, przypuścić zawsze możemy że liczba mająca współczynnik z drugiej strony to jest B jest większym niż A stojący na pierwszej stronie równania i z tego powodu jedynie tylko dla lepszej symetryzacji, przemienimy te dwa współczynniki między sobą, piszę równanie do rozwiązania

$$x^2 - By^2 = Az^2$$

z warunkiem że $A > B$. Wyżej w uwagach dowiedziałyśmy się że x i y są pierwszemi między sobą, a dlatego również y i A są pierwszemi między sobą, inaczej bowiem, gdyby miały dzielnik wspólny np. δ, ten podzieliłby także musiał x przez co x i y nie byłyby pierwszemi między sobą.

Gdybyśmy znali wartości x i y np. $x = M$, $y = N$ rozwiązujące ostatnie równanie, tedy, ponieważ y i A czyli N i A są pierwszemi między sobą, rozwiązać można równanie pierwszego stopnia $M = Nn - Ay'$, w którem n i y' są dwiema nieoznaczonemi, w liczbach całkowitych. Atedy to jest możebnem dla każdych dwóch wartości x i y, zatem chociaż te są nam nieznane, wszelako zawsze położyć można ogólnie $x = ny - Ay'$ gdzie, jak się rzekło, n i y' są dwiema nieoznaczonemi całkowitemi liczbami. Tę wartość na x położywszy w powyższem równaniu i podzieliwszy je przez A, znajdziemy

$$\frac{n^2 - B}{A}y^2 - 2ny'y + Ay'^2 = z^2$$

Ponieważ y i A są pierwszemi między sobą, zatem, jeżeli się to równanie utrzymać może, musi być $n^2 - B$ podzielnem przez A, bo z drugiej strony jest liczba całkowita z^2. Z tego warunku widzimy, że znalazłszy takie n żeby $\frac{n^2 - B}{A}$ było liczbą całkowitą, mielibyśmy też w równaniu $x = ny - Ay'$ tylko jedną niewiadomą, y', którąby wartość znaleźlibyśmy z tego równania.

Aby dopełnić warunku $\frac{n^2 - B}{A}$ = liczbie całkowitej, dosyć jest próbować położyć za n liczby nie większe od $\frac{1}{2}A$, bo takie wartości powiększające lub zmniejszające o jakąkolwiek wielokrotność liczby A, [F] nie nadwerężamy. Niech bowiem n' będzie ~~xxx~~ wartością ~~xxx~~ n czyniącą $\frac{n^2 - B}{A}$ liczbą całkowitą, tedy powiększywszy lub zmniejszywszy tęż wartość o hA, będzie ona $n' \pm hA$ a przyjęte wyżej wyrażenie na x zamieni się na $x = n'y - A(y' \mp h)$, ~~xxx~~ za położeniem [znowu] wartości x, znajdziemy $\{n'y - A(y' \mp h)\}^2 - By^2 = Az^2$, a następnie $\frac{n'^2 - B}{A}y^2 - 2n'(y' \mp h)y + A(y' \mp h)^2 = z^2$, co wyraźnie pokazuje że powiększenie lub zmniejszenie n' o hA nie wpływa zupełnie na podzielność $n^2 - B$ przez A; dlatego próbując różne liczby za n, dostatecznie jest brać takowe tylko w granicach 0 i $\frac{1}{2}A$. Gdyby się w tych granicach żadna nie znalazła liczba dopełniająca powyższego warunku, z pewnością twierdzić możemy że dane równanie nie może być rozwiązanem w liczbach wymiernych.

[F] podzielności $n^2 - B$ przez A

Znalazłszy w granicach 0 i ½A liczby dopuszczające rzeczonego warunku, z każdej z nich odpadnie potrzeba następujący dalszy rachunek: położywszy $\frac{n^2-B}{A}=A'k^2$, gdzie k^2 wyraża największy czynnik kwadratowy zawarty w tym ilorazie, tedy równanie ostatnie przejdzie na następujące

$$A'k^2y^2-2nyy'+Ay'^2=z^2$$

Pomnożymy to równanie przez $A'k^2$ oraz z pierwszej jego strony dodajmy i odejmijmy $n^2y'^2$ a znajdziemy

$$(A'k^2y-ny')^2-(n^2-AA'k^2)y'^2=A'k^2z^2$$

Lecz $AA'k^2=n^2-B$, zatem położywszy $x'=A'k^2y-ny'$ a $kz=z'$, otrzymamy

$$x'^2-By'^2=A'z'^2$$

Nowe to równanie jest zupełnie podobne pierwszemu i tylko że B i A' nie mają żadnego czynnika kwadratowego i $A'<\frac{1}{4}A$; [Jeżeli to równanie rozwiążemy w liczbach wymiernych t.j. znajdziemy x', y', z', natenczas ze równań $x'=A'k^2y-ny'$, $z'=kz$ i $x=ny-Ay'$, znajdziemy też wymierne wartości x, y, z, chociaż nie całkowite, czego też w warunku nie założyliśmy.

Albo kiedy $n<\frac{1}{2}A$ zatem $n^2<\frac{1}{4}A^2$ a tem więcej $\frac{n^2-B}{Ak^2}=A'<\frac{1}{4}A$.

W przypadku że A' jest liczbą kwadratową i dodatnią, położywszy $z'\sqrt{A'}=z''$, ostatnie równanie będzie $x'^2-z''^2=By'^2$ o jakiem już wyżej mówiliśmy i które rozwiązać można. Jeżeli zaś A' nie jest ani kwadratem ani $=1$ ale $A'\geq B$, dalszy rachunek prowadzi się następującym sposobem: położywszy jak poprzednio $x'=n'y'-A'y''$, znajdziemy

$$\frac{n'^2-B}{A'}y'^2-2n'y'y''+A'y''^2=z'^2$$

Jeżeli to równanie utrzymać się może, być musi $\frac{n'^2-B}{A'}$ = liczbie całkowitej. Znalazłszy w granicach 0 i $\frac{1}{2}A'$ taką wartość lub więcej wartości które ten iloraz czynią liczbą całkowitą, znowu z każdej odpadnie potrzeba rachunek jak wyżej, czynnik zaznaczony, położywszy $\frac{n'^2-B}{A'}=A''k'^2$ gdzie k'^2 wyraża największy czynnik kwadratowy w tym ilorazie zawarty, przyjdziemy znowu do równania

$$A''k'^2y'^2-2n'y'y''+A'y''^2=z'^2$$

które mnożąc przez $A''k'^2$ i dodawszy a zarazem i odjąwszy z pierwszej strony $n'^2y''^2$, otrzymamy $(A''k'^2y'-n'y'')^2-(n'^2-A'A''k'^2)y''^2=A''k'^2z'^2$ a kładąc tu jak poprzednio $A''k'^2y'-n'y''=x''$, $k'z'=z''$ oraz za n'^2-B za $A'A''k'^2$, znajdziemy

$$x''^2-By''^2=A''z''^2$$

gdzie znowu $A''<\frac{1}{4}A'$. Ten sam rachunek powtarza się dopóty aż się przyjdzie do równania, opuszczając kreski, $x^2-By^2=Cz^2$ w którem $B>C$, a wtedy napisawszy je tak $x^2-Cz^2=By^2$, wszystko cośmy dotąd robili dla zmniejszenia A, robić musimy dla zmniejszenia B. Pierwsze podstawienie jakie zrobić potrzeba, będzie $x=nz-Bz'$ skąd się otrzyma

$$\frac{n^2-C}{B}z^2-2nz'z+Bz'^2=y^2 \quad \text{kładąc} \quad \frac{n^2-C}{B}=B'h^2$$

albo $B'h^2z^2-2nz'z+Bz'^2=y^2$

albo $(B'h^2z-nz')^2-(n^2-BB'h^2)z'^2=B'h^2y^2$

a położywszy $x'=B'h^2z-nz'$, $hy=y'$ oraz n^2-C za $BB'h^2$, otrzymamy

$$x'^2-Cz'^2=B'y'^2 \quad \text{gdzie } B'<\tfrac{1}{4}B$$

Zupełnie ten sam rachunek powtarza się, dopóki jeden ze współczynników który ciągle zmniejszamy nie stanie się $=1$, w którym razie już wiemy jak postąpić. To ostatnie równanie rozwiązawszy, za pomocą wzorów takich jak $x''=A''k'^2y'-n'y''$, $k'z'=z''$, $x'=A'ky-ny'$, $kz=z'$ i t.d. wracamy do wartości pierwotnych ilości nieznanych.

§13. Rozumiejąc że lepiej niż najobszerniejszem tłomaczeniem objaśnić całe postępowanie przykładem, biorę za takowy

Zagadnienie: Znaleźć dwie liczby takie, których suma kwadratów wraz z podwójną ich sumą, mniejsza jest o 27 od 5 razy wziętego iloczynu tychże samych liczb.

Szukane liczby oznaczywszy przez x i y, z warunków zagadnienia utworzone równanie będzie

$$x^2+y^2+2(x+y)-5xy+27=0$$

Ponieważ jest wszystko jedno rozwiązać to równanie według y czy według x, więc je rozwiążemy według x, a znajdziemy

$$2x-5y+2=\sqrt{21y^2-28y-104}$$

t. j. $\alpha=-104$, $\beta=-28$ a $\gamma=21$. Położywszy dalej $2x-5y+2=t$, będzie

$$21y^2-28y-104=t^2$$

To równanie rozwiązane według y, daje

$$21y-14=\sqrt{2380+21t^2} \quad \text{gdzie } A=21 \text{ a } B=2380.$$

Kładąc nareszcie $u=21y-14$ otrzymamy nakoniec

$$u^2=2380+21t^2 \text{ t. j. } u^2=B+At^2$$

czyli

$$u^2-21t^2=2380$$

Połóżmy tu $u=\frac{\xi}{\zeta}$, a $t=\frac{\upsilon}{\zeta}$, a powtóre przemieńmy A na B i odwrotnie, t. j. połóżmy $A=2380$ a $B=21$, tedy ostatecznie otrzymamy do rozwiązania równanie

$$\xi^2-21\upsilon^2=2380\zeta^2 \text{ t. j. } x^2-By^2=Az^2$$

F Ponieważ $2380=2^2.595$, więc położywszy $2\zeta=\zeta'$, będzie równanie do rozwiązania $\xi^2-21\upsilon^2=595\zeta'^2$

F Połóżmy $\xi=n\upsilon-595\upsilon'$ (: $x=ny-Ay'$:) a znajdziemy

$$\frac{n^2-21}{595}\upsilon^2-2n\upsilon'\upsilon+595\upsilon'^2=\zeta'^2$$

Dla $n=49$ jest $\frac{n^2-21}{595}=2^2$ (: więc $A'=1$ i $k^2=2^2$:) a równanie nasze przechodzi na

$$4\upsilon^2-2.49\upsilon'\upsilon+595\upsilon'^2=\zeta'^2$$

Mnożąc to równanie przez $A'k^2=4$ i dodając i odejmując $49^2\upsilon'^2$ od pierwszej strony, będzie

$$(4\upsilon-49\upsilon')^2-21\upsilon'^2=\zeta''^2$$

przy czem powyższe równanie $\xi=n\upsilon-595\upsilon'$, będzie $\xi=49\upsilon-595\upsilon'$.

Położywszy dalej $4\upsilon-49\upsilon'=\xi'$ a $k\zeta'=2\zeta'=\zeta''$, otrzymamy nowe równanie

$$\xi'^2-21\upsilon'^2=\zeta''^2$$

i tym sposobem skończone dalsze przerabiania gdyż

$$\xi'^2-\zeta''^2=21\upsilon'^2$$

Rozbiwszy 21 na dwa czynniki t. j. (na 1.21, lub na 3 i 7), tudzież położywszy także $\upsilon'=pq$ mamy

$$(\xi'+\zeta'')(\xi'-\zeta'')=3.7p^2q^2$$

skąd znajdziemy, kładąc $\xi'+\zeta''=3p^2$ a $\xi'-\zeta''=7q^2$; $\xi'=3p^2+7q^2$, $\zeta''=3p^2-7q^2$ $\upsilon'=2pq$

Wracając teraz do wartości x i y, połóżmy tu $p=2$ a $q=1$ a otrzymamy $\xi'=19$, $\zeta''=5$, $\upsilon'=4$. Potem ze równań $4\upsilon-49\upsilon'=\xi'$, $\zeta''=2\zeta'$, znajdziemy $\upsilon=\frac{215}{4}$ (a ze równania $2\zeta=\zeta'$, $\zeta=\frac{5}{4}$); $\zeta'=\frac{5}{2}$. Dalej, ze równania $\xi=49\upsilon-595\upsilon'$, otrzymamy $\xi=\frac{1015}{4}$, przeto $u=\frac{\xi}{\zeta}=203$, $t=\frac{\upsilon}{\zeta}=43$, a nareszcie ze równania $u=21y-14$, otrzymamy $y=\frac{31}{3}$, zaś ze równania $2x-5y+2=t$, znajdziemy $x=\frac{139}{3}$.

Znaleziona wartość na y, czyni powyższy trójmian pod znakiem pierwiastkowym zupełnym kwadratem (w przypadku naszym), $\sqrt{21y^2-28y-104}=43$; że zaś wartości $x=\frac{139}{3}$ i $y=\frac{31}{3}$ czynią zadosyć warunkom zagadnienia, każdy się przekona może kładąc też wartości w początkowe równanie.

Lecz $\frac{n^2-21}{595}$ nie tylko dla $n=49$, ale też i dla $n=189$ jest liczbą całkowitą, gdyż bowiem $\frac{189^2-21}{595}=4.15=15.2^2$ przez co $A'=15$ a $k^2=2^2$, dla większej przeto wprawy dokładniejszego zrozumienia przebiegu całego rachunku, przeprowadźmy z tej wartości n.

Z równanie $\xi=n\upsilon-595\upsilon'$, przejdzie na $\xi=189\upsilon-595\upsilon'$, a równanie $\xi^2-21\upsilon^2=595\zeta'^2$ na $2^2.15\upsilon^2-2.189\upsilon'\upsilon+595\upsilon'^2=\zeta'^2$, które pomnożywszy przez $A'k^2=15.2^2$ oraz dodawszy i odjąwszy na pierwszej jego stronie $189^2\upsilon'^2$, znajdziemy

$$(60\upsilon-189\upsilon')^2-21\upsilon'^2=15.2^2\zeta'^2$$

a położywszy $\xi'=60\upsilon-189\upsilon'$ tudzież $k\zeta'=\zeta''$ czyli $2\zeta'=\zeta''$, otrzymamy nowe równanie

$$\xi'^2-21\upsilon'^2=15\zeta''^2 \quad (: x'^2-By'^2=A'z'^2 :)$$

Że $B>A'$ więc do dalszego rachunku mieć będziemy równanie $\xi'^2-15\zeta''^2=21\upsilon'^2$

Teraz połóżmy $\xi' = n\xi'' - 21\xi'''$ i otrzymamy tąż samą jak poprzednio drogą

$$\frac{n^2-15}{21}\xi''^2 - 2n\xi'''\xi'' + 21\xi'''^2 = \upsilon'^2$$

Dla $n=6$ jest $\frac{n^2-15}{21}=1$ t.j. liczbie całkowitej dla czego $\xi' = 6\xi'' - 21\xi'''$, a ostatnie zrównanie przechodzi na $\xi''^2 - 2.6\xi'''\xi'' + 21\xi'''^2 = \upsilon'^2$, do którego pierwszej strony dodawszy i odjąwszy $6^2\xi'''^2$, będzie

$$(\xi'' - 6\xi''')^2 - 15\xi'''^2 = \upsilon'^2$$

A położywszy tu $\xi'' - 6\xi''' = \xi''$, tudzież $k'\upsilon = \upsilon''$ czyli $\upsilon' = \upsilon''$, otrzymamy

$$\xi''^2 - 15\xi'''^2 = \upsilon''^2$$

i tu już jest koniec przerobień, bo $\xi''^2 - \upsilon''^2 = 15\xi'''^2$. Rozłożywszy 15 na dwa czynniki 1.15 lub 3.5 i biorąc ~~np~~ drugie dwa czynniki, tudzież kładąc $\xi''' = pq$ otrzymamy $\xi'' + \upsilon'' = 3p^2$ a $\xi'' - \upsilon'' = 5q^2$, skąd $\xi'' = 3p^2 + 5q^2$, $\upsilon'' = 3p^2 - 5q^2$, $\xi''' = 2pq$

Dla powrócenia do x i y, połóżmy tu $p=2$, $q=1$ a znajdziemy $\xi'' = 17$, $\upsilon'' = 7$, $\xi''' = 4$. Z temi wartościami mamy $\xi'' = \xi'' + 6\xi''' = 41$, $\upsilon' = \upsilon'' = ~~4~~\ 7$ zaś $\xi' = 6\xi'' - 21\xi''' = 162$. Z temi tu wartościami mianowicie ξ' i υ', mamy $\upsilon = \frac{\xi' + 189\upsilon'}{60}$ ~~[illegible]~~ a $\xi = \frac{\xi''}{2} = \frac{41}{2}$. Nareszcie $\xi = 189\upsilon - \frac{595}{~~2380~~}\upsilon' = \frac{2051}{4}$, $\left(\xi = \frac{\xi'}{2} = \frac{41}{4}\right)$, przeto $u = \frac{\xi}{\zeta} = \frac{2051}{41}$, $t = \frac{99}{41}$. Z temi wartościami nakoniec mamy $y = \frac{u+14}{21} = \frac{2625}{21.41} = \frac{125}{41}$ a $x = \frac{t+5y-2}{2} = \frac{321}{41}$ ~~$\frac{642}{41}$~~.

Tak otrzymane wartości x i y wprowadzając w pierwotne zrównanie, przekonamy się ze radością czynią warunkom zagadnienia.

F1... Kładąc w ~~wz~~ wyrażeniach na ξ'', υ'' i ξ''' inne i to dowolne wartości na p i q za każdym razem przyjdziemy do wartości x i y rozwiązujących zagadnienie, ale naturalnie coraz innych tak, że liczba rozwiązań będzie nieskończoną dla każdej wartości n. F

Mówiąc o sposobach dawniej używanych do rozwiązania zrównań drugiego stopnia, a mianowicie mówiąc w §10. o uczynieniu trójmianu $\alpha + \beta.x + \gamma x^2$ dokładnym kwadratem, w trzecim przypadku, jako przykład rozwiązaliśmy zagadnienie: znaleźć liczby od których podwójnego kwadratu odjąwszy 2, pozostaje na reszcie liczba kwadratowa. Zagadnienie to wymaga tak wyznaczyć x, iżby $2x^2-2$ było dokładnym kwadratem. Aby to zagadnienie rozwiązać sposobem Lagranża, dosyć jest położyć $At^2 + B = 2x^2 - 2$. Połóżmyż tu $2x^2 - 2 = v^2$ a zaś $x = \frac{\xi}{\zeta}$, $v = \frac{\upsilon}{\zeta}$, a otrzymamy zrównanie do rozwiązania

$$2\xi^2 - 2\zeta^2 = \upsilon^2 \text{ czyli } \upsilon^2 + 2\zeta^2 = 2\xi^2$$

w którem, jak widzimy $B = A$ i oprócz tego B jest odjemnem. Połóżmy tu $\upsilon = n\zeta + 2\zeta'$ a znajdziemy $\frac{n^2+2}{2}\zeta^2 + 2n\zeta'\zeta + 2\zeta'^2 = \xi^2$ gdzie $\frac{n^2+2}{2}$ powinno być liczbą całkowitą dla n nie większego jak $\frac{1}{2}A$ t.j. $\frac{1}{2}.2 = 1$, a dlatego n nie może być inną liczbą jak 0, będzie więc ostatnie zrównanie $\zeta^2 + 2\zeta'^2 = \xi^2$ czyli $\xi^2 - \zeta^2 = 2\zeta'^2$. $2 = 1.2$ położywszy przeto $\zeta' = pq$, znajdziemy jak w poprzednich przykładach

$$\xi = 1.p^2 + 2q^2, \quad \zeta = 1.p^2 - 2q^2 \text{ a } \zeta' = 2pq.$$

Dla $p=1$ i $q=1$, znajdziemy $\xi = 3$, $\zeta = -1$, przeto $x = \frac{\xi}{\zeta} = -3$ a $2x^2 - 2 = 2.9 - 2 = 16 = 4^2$ zaś dla $p=3$, $q=2$ będzie $\xi = 17$, $\zeta = 1$, zatem $x = 17$ a $2x^2 - 2 = 2.17^2 - 2 = 576 = 24^2$ i t.d.

Szukając wartości na x któreby trójmian $7 + 15x + 13x^2$ uczyniła dokładnym kwadratem, tedy ponieważ $\alpha = 7$, $\beta = 15$, $\gamma = 13$, znajdziemy z wzorów na początku zamieszczonych $A = 52 = 4.13 = 2^2.13$ a $B = -139$, ~~[illegible]~~ F $2^2.13t^2 - 139$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ przeto $At^2 + B =$ F ~~[illegible]~~ $2^2.13t^2 - 139$, i warunki ~~[illegible]~~ dopełnimy skoro znajdziemy takie t że dwumian ~~[illegible]~~ (który oznaczamy przez u^2) będzie dokładnym kwadratem. Położywszy $u = \frac{\xi}{\zeta}$ a $t = \frac{\upsilon}{\zeta}$ będzie F ~~$\xi^2 + 139\upsilon^2 = 2^2.13\zeta^2$~~ ~~czyli nawzajem $\xi^2\ 2^2.13\zeta^2 - 139\upsilon^2$~~. Ale ponieważ $B = 2^2.13$ ma czynnik kwadratowy 2^2 zatem położywszy ~~[illegible]~~ $2\upsilon = \omega$, będzie $\xi^2 - 13\omega^2 = $ ~~$-139\upsilon^2$~~ $-139\zeta^2$

F $\xi^2 = 2^2.13\upsilon^2 - 139\zeta^2$ albo $\xi^2 - 2^2.13\upsilon^2 = -139\zeta^2$

F Wartości zaś dla n w pierwszym razie nie tylko są jak widzieliśmy 49 i 189, ale wszystkie zawarte w ogólnem wyrażeniu $595\alpha \pm 49$, w drugiem zaś wszystkie zawarte w wyrażeniu $21\beta \pm 6$ czyniące wyrażenia $\frac{n^2-21}{595}$ i $\frac{n^2-15}{21}$ liczbami całkowitemi.

Połóżmy tu $\xi = n\omega + 139\omega'$ /: $ny - Ay'$:/ a znajdziemy

$$\frac{n^2-13}{139}\omega^2 + 2n\,\omega'\omega + 139\omega'^2 = -\xi^2$$

$\frac{n^2-13}{139}$ dla n nie większego od $\frac{139}{2} = 69$ powinno być liczbą całkowitą. Taką liczbę znajdujemy probując, że jest 41 tak że $\frac{41^2-13}{139} = 12 = 3.2^2$ więc tu $A' = 3$, $k^2 = 4$ a ostatnie zrównanie przyjdzie na $3.2^2\omega^2 + 2.41\omega'\omega + 139\omega'^2 = -\xi^2$. Pomnożywszy to zrównanie przez $A'k^2 = 3.2^2$ i uprościwszy, dodając i odejmując z pierwszej strony $41^2\omega'^2$ znajdziemy

$$(3.2^2\omega + 41\omega')^2 - 13\omega'^2 = -3.2^2\xi^2$$

albo, ktadząc

$$\xi' = 12\omega + 41\omega' \quad a \quad \zeta' = 2\xi$$

$$\xi'^2 - 13\omega'^2 = -3\zeta'^2 \quad czyli \quad \xi'^2 + 3\zeta'^2 = 13\omega'^2$$

Połóżmy tu znowu $\xi' = n'\zeta' - 13\zeta''$ a będzie

$$(n'\zeta' - 13\zeta'')^2 + 3\zeta'^2 = 13\omega'^2$$

albo $\frac{n'^2+3}{13}\zeta'^2 - 2n'\zeta''\zeta' + 13\zeta''^2 = \omega'^2$

$\frac{n'^2+3}{13}$ powinno być liczbą całkowitą dla n' nie większego jak $\frac{13}{2} = 6$. Rzeczywiście dla $n' = 6$, jest $\frac{n'^2+3}{13} = 3$ (a dla każdej innej ogólnie przez $13\beta \pm 6$ wyrażonej będzie także całkowitą), ostatnie przeto zrównanie przyjdzie na

$$3\zeta'^2 - 2.6\zeta''\zeta' + 13\zeta''^2 = \omega'^2$$

które mnożąc przez 3 oraz dodając i odejmując $6^2\zeta''^2$ z pierwszej strony, będzie

$$(3\zeta' - 6\zeta'')^2 + 3\zeta''^2 = 3\omega'^2$$

a kładąc znowu $\xi'' = 3\zeta' - 6\zeta''$ tudzież $\omega'' = \omega'$, otrzymamy nowe zrównanie

$$\xi''^2 + 3\zeta''^2 = 3\omega''^2$$

Połóżmy tu nareszcie $\xi'' = n''\zeta'' - 3\zeta'''$ a znajdziemy

$$(n''\zeta'' - 3\zeta''')^2 + 3\zeta''^2 = 3\omega''^2$$

albo $\frac{n''^2+3}{3}\zeta''^2 - 2n''\zeta'''\zeta'' + 3\zeta'''^2 = \omega''^2$

$\frac{n''^2+3}{3}$ = liczbie całkowitej dla n'' nie większego jak $\frac{3}{2} = 1$. Wziąwszy tu więc $n'' = 0$, będzie $\frac{n''^2+3}{3} = 1$, a ostatnie zrównanie przyjdzie na

$$\zeta''^2 + 3\zeta'''^2 = \omega''^2$$

z którego $\zeta''^2 - \omega''^2 = -3\zeta'''^2$. Ponieważ $-3 = 1.-3$, więc położywszy $\zeta''' = pq$, będzie $\zeta'' + \omega'' = p^2$ a $\zeta'' - \omega'' = -3q^2$, z których zrównań znajdziemy $\zeta'' = \frac{p^2-3q^2}{2}$, $\omega'' = \frac{p^2+3q^2}{2}$. Dla $p = 1$ i $q = 1$, otrzymamy: $\zeta'' = -1$, $\omega'' = 2$, $\zeta''' = 1$; ze zrównania $\xi'' = n''\zeta'' - 3\zeta'''$ gdzie $n'' = 0$, znajdziemy $\xi'' = -3$, zaś ze zrównania $\xi'' = 3\zeta' - 6\zeta''$ z wiadomemi $\xi'' = -3$ i $\zeta'' = -1$, znajdziemy $\zeta' = -3$. Następnie ze zrównania $\xi' = n'\zeta' - 13\zeta''$ gdzie $n' = 6$, $\zeta' = -3$ a $\zeta'' = -1$, otrzymamy $\xi' = -5$. Dalej ze zrównania $\xi' = 12\omega + 41\omega'$ w którem $\xi' = -5$ a $\omega' = \omega'' = 2$, będzie $\omega = -\frac{87}{12}$. Nareszcie ze zrównania $\xi = n\omega + 139\omega'$ gdzie $n = 41$ a $\omega' = 2$, otrzymamy $\xi = -\frac{77}{4}$. Ponieważ $\zeta' = 2\xi$ a $\zeta' = -3$, więc $\xi = -\frac{3}{2}$ a następnie $u = \frac{\xi}{\xi} = \frac{77}{6}$, przeto ze zrównania $2\gamma x + \beta = u$ gdzie $\gamma = 13$ a $\beta = 15$ znajdziemy $x = -\frac{1}{12}$. Rzeczywiście $\sqrt{7 + 15x + 13x^2} = \sqrt{7 - 15.\frac{1}{12} + 13.\frac{1}{144}} = \frac{29}{12}$.

W tym tu przykładzie pokazał się nam przypadek że $A = B$ który nam nie nastręczył najmniejszej trudności bo mieliśmy zrównanie $\xi''^2 + 3\zeta''^2 = 3\omega''^2$ i dla uczynienia $\frac{n''^2+3}{3}$ = liczbie całkowitej, wzięliśmy $n'' = 0$ i otrzymali iloraz $A' = 1$. Lecz gdyby to zrównanie było $\xi''^2 - 3\zeta''^2 = 3\omega''^2$, natenczas mielibyśmy $\frac{n''^2 - B}{A} = \frac{n''^2-3}{3}$ gdzie się zdawać mogło że taka wartość $n'' = 0$ jest dostateczną do dopełnienia rachunku. Tym jednakże sposobem postąpilibyśmy fałszywie, bo byśmy otrzymali $\frac{n''^2-3}{3} = -1 = A'$ t.j. otrzymalibyśmy A' jako liczbę odjemną, coby się nie zgadzało z przypuszczeniem na początku zrobionem że A' jest dodatnem. Jakże więc mamy postąpić w takim przypadku? Oto położyć $n = A$, bo otrzymamy $\frac{A^2 - A}{A} = A - 1$, a to będzie ilorazem całkowitym A'. Ten atoli przypadek jeszcze prościej F

(Zdaje mi się że na tych przykładach mogę poprzestać, zalecając jednak uczącym się do ćwiczenia się w tym rachunku na różnych przykładach dowolnie wziętych

F Jeśli tu każda liczba ogólnie przez $139\alpha \pm 41$ wyrażona, czyli $\frac{n^2-13}{139}$ liczbą całkowitą. Wszelako jeśli w granicach $\frac{139}{2}$ nie znajdzie się takiej liczby, zrównanie nie może być rozwiązanem.

F rozwiązanie można następującym sposobem: ze zrównania $x^2 - Ay^2 = Az^2$ zaraz widzimy, iż x jest podzielnym przez A, położywszy przeto $x = A\xi$ otrzymamy (po skróceniu) $A\xi^2 - y^2 = z^2$ czyli $y^2 + z^2 = A\xi^2$ gdzie $B = 1$; ponieważ y i z są względnie pierwszemi między sobą, można położyć $y = nz + Az'$, będzie się otrzymać $\frac{n^2+1}{A}z^2 + 2nzz' + Az'^2 = \xi^2$, $A'k^2z^2 + 2nzz' + Az'^2 = \xi^2$. To pomnożywszy przez $A'k^2$, oraz położywszy $A'k^2z + nz = y$ a $k\xi = \xi'$, przyjdzie na $y^2 + z^2 = A'\xi'^2$, koniecznie gdzie A' jest dodatnim.

(*) §14. Już się poprzednio wspomniało, że jeżeli jeden z warunków w przerobionych z równaniach $\frac{n^2-B}{A}$ = całk., $\frac{n'^2-B}{A'}$ = całk., $\frac{n''^2-B}{A''}$ = całk. .... $\frac{n'''^2-C}{B}$ = całk. i t.d. nie jest (a raczej ~~nie~~ może być) dopełnionym, (odpowiednie) równanie $x^2-By^2=Az^2$ a następnie i równanie z którego to ostatnie wyprowadzonem zostało nie może być rozwiązanem w liczbach wymiernych. Atoli, skoro tylko znajdują się takie liczby n i n' całkowite że dwa warunki $\frac{n^2-B}{A}$ = całk i $\frac{n'^2-A}{B}$ = całk. są dopełnionemi, można dowieść, na czém się tu nie zatrzymamy, że i trzeci warunek $\frac{n''^2-A'}{B}$ = całk. oraz wszystkie następne będą mogły być dopełnionemi. Trzy przeto poprzednie warunki są dostatecznemi do przekonania się o ~~rozwiązalności~~ możności lub niemożności rozwiązania każdego równania zamykającego trzy nieoznaczone x, y, z.

Tak np. w poprzednim § mieliśmy równanie do rozwiązania $At^2+B=u^2$ czyli $2^2.13t^2-139=u^2$, z którego przyszliśmy do równania $\xi^2-13\omega^2=-139\zeta^2$. Otóż dwa warunki do dopełnienia są: $\frac{n^2-13}{139}$ = całk. i $\frac{n'^2+139}{13}$ = całk. a których pierwszy dla $n=41$, a drugi dla $n'=2$ ~~wymi~~ urzeczywistnia się liczbami całkowitemi; dla tego też i trzeci warunek $\frac{n''^2+3}{13}$ = całk., bo $A'=-3$, jest dopełnionym biorąc $n''=6$ i równanie jak widzieliśmy mogło być rozwiązanem.

Każde więc równanie postaci $ax^2+by^2=cz^2$ będzie mogło być rozwiązanem jeżeli żaden ze współczynników a, b, c, nie ma czynnika kwadratowego, a nadto biorąc je po dwa a,b; a,c; b,c, nie mają wspólnego dzielnika, tudzież, jeżeli się znajdują trzy całkowite liczby λ, μ, ν, dopełniające następnych trzech warunków $\frac{a\lambda^2+b}{c}$ = całk. $\frac{c\mu^2-b}{a}$ = całk. i $\frac{c\nu^2-a}{b}$ = całk. Te warunki wypadają z odpowiednich $\frac{n^2-B}{A}$, $\frac{n'^2-A}{B}$, $\frac{n''^2-A'}{B}$ skoro dane równanie rozmnożymy przez $\frac{c}{x}$ i następnie napiszemy: $\left(\frac{cz}{x}\right)^2-bc\left(\frac{y}{x}\right)^2=ac$, bo widzimy że $A=ac$, $B=bc$ więc dwa ~~ostatnie~~ pierwsze warunki będą ~~$\frac{n^2-ac}{bc}$ i n'^2~~ $\frac{n^2-bc}{ac}$ i $\frac{n'^2-ac}{bc}$. Położywszy $n=c\mu$ a $n'=c\nu$ też warunki przejdą na $\frac{c\mu^2-b}{a}$ i $\frac{c\nu^2-a}{b}$. Aby trzeci warunek wyrazić, tedy ponieważ wiadomo że $n^2-B=AA'k^2$ czyli $c\mu^2-b=aA'k^2$. Ale ak^2 i bc nie mają żadnego wspólnego dzielnika, przeto ostatni warunek będzie dopełnionym, jeżeli $\frac{ak^2n''^2-c\mu^2+b}{bc}$ = całk. Żeby zaś licznik mógł być podzielnym przez b, musi być $ak^2n''^2-\mu^2$ podzielnem także przez b. Położywszy tu z drugiego

warunku cv^2 za a, musi być $k^2 n''^2 v^2 - \mu^2$ podzielnym przez b, co też rzeczywiście zachodzić może, polegając tylko na n'' takiej wartości, żeby $\frac{k v n'' \pm \mu}{b}$ = całk. Jeżeli więc w równaniu $x^2 - By^2 = Az^2$, A i B nie mają wspólnego dzielnika, t.j. gdyby w przetworzonem równaniu było $c=1$, trzeci ten warunek dopełnia się przez dwa pierwsze. Jeżeli zaś A i B mają jakiś czynnik wspólny, to w tym przypadku dopełnić jeszcze należy i ten trzeci warunek t.j. $\frac{ak^2 n''^2 + b}{c}$ albo krócej $\frac{a\lambda^2+b}{c}$.

Weźmy tu za przykład równanie $3x^2+5y^2=47z^2$ do którego zastosujmy trzy powyższe warunki, tedy znajdziemy $\frac{a\lambda^2+b}{c} = \frac{3\lambda^2+5}{47}$, $\frac{c\mu^2-b}{a} = \frac{47\mu^2-5}{3}$ i $\frac{cv^2-a}{b} = \frac{47v^2-3}{5}$. Pierwsze wyrażenie będzie liczbą całkowitą dla $\lambda = 47\alpha \pm 22$, drugie dla $\mu = 3\beta \pm 1$ a trzecie dla $v = 5\gamma \pm 2$ biorąc za α, β, γ wszystkie liczby całkowite, a dlatego dane równanie rozwiązanem być może i to nawet w liczbach całkowitych.

Chcąc je rzeczywiście rozwiązać, można mu nadać trojaką postać, mia-
nowicie $3^2x^2+15y^2=141z^2$ t.j. $x_1^2+15y^2=141z^2$ kładąc $3x=x_1$
albo $5^2y^2+15x^2=235z^2$ ... $y_1^2+15x^2=235z^2$ ... $5y=y_1$
lub nareszcie $47^2z^2-141x^2=235y^2$ ... $z_1^2-141x^2=235y^2$ ... $47z=z_1$

Rozwiązując więc ostatnie $z_1^2-141x^2=235y^2$ będzie $\frac{n^2-141}{235}=37$ dla $n=94$, a położywszy $y=y_1$, przerobione ... $z_2^2-37y_1^2=141x_1^2$. Tu jest $\frac{n'^2-37}{141}=7$ dla $n'=32$; po czem przerobione równanie $z_3^2-7x_2^2=37y_2^2$, gdzie $\frac{n''^2-7}{37}=2$ dla $n''=9$; a następne przerobione równanie $z_4^2-2y_3^2=7x_3^2$, i nareszcie $\frac{n'''^2-2}{7}=1$, dla $n'''=3$, a ostatnie równanie przerobione $z_5^2-x_4^2=2y_4^2$. Ponieważ $2=2.1$, więc położywszy $y_4=pq$, znajdziemy wiadomym sposobem $z_5=2p^2+q^2$, $x_4=2p^2-q^2$, $y_4=2pq$. Dla $p=1$ i $q=1$, będzie $z_5=3$, $x_4=1$, $y_4=2$ a z przybranych więc przerobień równań, przyjdziemy do następnych wartości $x=\frac{1365}{37}$, $y=50$ a $z=\frac{695}{37}$, skąd $\frac{y}{x}=\frac{370}{273}$, $\frac{z}{x}=\frac{139}{273}$. Wziąwszy więc, co wolno, $x=273$, będzie $y=370$, $z=139$ które liczby rozwiązują dane równanie. Dla $p=2$, $q=1$, znajdziemy tąż samą drogą $x=5549$, $y=4514$, $z=2033$. i t.d.

Ponieważ w danem równaniu są tylko kwadraty niewiadomych, zatem znaki z jakiemi otrzymamy x, y, z, nie mają wpływu na rozwiązalność równania.

(: NB następne cyfry §§ posunąć o 1:)

Z § 5 wypada ~~Dawno już pokazało się~~ iż dwumian $2x^2+11$ dla żadnej wartości x nie może być dokładnym kwadratem; zobaczmyż więc jakim sposobem zapewnimy się o tém postępując drogą przez Lagrange'a wskazaną. Połóżywszy $2x^2+11=y^2$ a potém $x=\frac{\xi}{\zeta}$ a $y=\frac{v}{\zeta}$, będzie $2\xi^2+11\zeta^2=v^2$ czyli

$$v^2-2\xi^2=11\zeta^2$$

Kładzę $v=n\xi-11\xi'$ będzie $(n\xi-11\xi')^2-2\xi^2=11\zeta^2$ stąd

$$\frac{n^2-2}{11}\xi^2-2n\xi\xi'+11\xi'^2=\zeta^2$$

$\frac{n^2-2}{11}$ powinno być liczbą całkowitą dla n niewiększego jak $\frac{11}{2}=5$; lecz ponieważ żadna z liczb 2, 3, 4, 5 położona za n nie czyni tego ilorazu liczbą całkowitą, wnieśiemy stąd że powyższe zrównanie jest niemożebném, że zatém dwumian $2x^2+11$ nie może być dokładnym kwadratem dla żadnej wartości x.

(*) § 15 ~~11~~ ~~Dotąd~~ wskazanym przez Lagrange'a sposobem rozwiązać można każde zrównanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi, jeżeli tylko rozwiązaniem być może albo tylko w liczbach wymiernych, nie jest atoli ten sposób dostatecznym jeżeli toż zrównanie rozwiązać chcemy w liczbach nietylko wymiernych ale nawet całkowitych. Nim poznamy ~~jaką~~ drogę prowadzącą do takiego rozwiązania, ~~do której~~ a którą także Lagrange wskazał, zobaczmy znowu naprzód jak dawniej postępowano.

Ponieważ rozwiązanie zrównania drugiego stopnia z dwiema zmiennemi zależy jak widzieliśmy od uczynienia trójmianu $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ ~~kwadratem wymiernym~~ dokładnym kwadratem (a tu dodamy kwadratem z liczby całkowitej), przeto zastanówmy się nad tym trójmianem. Z tego trójmianu pozbyć się można wyrazu mającego pierwszą potęgę ilości x kładąc tylko, jak z teoryi zrównań wiadomo $x=\frac{z-\beta}{2\gamma}$, przez co otrzymamy

$$\frac{z^2+(4\alpha\gamma-\beta^2)}{4\gamma}$$

a ponieważ ten dwumian ma być kwadratem, więc połóżmy $\frac{z^2+4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}=\frac{t^2}{4\gamma}$ przez co będzie $4\alpha\gamma-\beta^2+z^2=\gamma t^2$ t. j. $\gamma t^2+\beta^2-4\alpha\gamma$ musi być dokładnym kwadratem. Połóżywszy $\beta^2-4\alpha\gamma=\varrho$, ponieważ $\gamma t^2+\varrho=z^2$, widzimy zatém że $\gamma t^2+\varrho$ musi być kwadratem. Tym sposobem usiłowania nasze zwrócić się muszą do znalezienia wartości całkowitej x takiej, któraby dwumian ax^2+b uczyniła dokładnym kwadratem. O tym dwumianie już się na początku § 4. mówiło, także cały sposób Lagrange'a odnosi się do takiegoż dwumianu który połóżymy ax^2+b ~~$=y^2$ a potém~~ $x=\frac{\xi}{\zeta}$, $y=\frac{v}{\zeta}$. Wszystko atoli co się dotąd powiedziało, miało na celu jedynie liczby wymierne. Zamierzając sobie teraz rozwiązać toż zrównanie w liczbach całkowitych, postąpmy ze zrównaniem $ax^2+b=y^2$ naprzód tak jak także postąpiliśmy, mianowicie; co jest koniecznem w tym tu rodzaju rozwiązania, probując szukajmy całkowitej wartości na x takiej, iżby ax^2+b było dokładnym kwadratem. Niech $x=h$ dopełnia tego warunku tak że $ah^2+b=k^2$ gdzie przeto h i k są liczbami znanemi. Całe teraz zadanie nasze zwrócimy do tego jakim sposobem z tego jednego przypadku znaleźć wszystkie inne. Trudność która tu daleko jest większą niż przy liczbach wymiernych niech nas bynajmniej nie zraża, ale owszem do dalszych zachęca, bo rozwiązanie powyższego zrównania, a zatém i zrównania $x^2-By^2=Az^2$ w liczbach całkowitych, jest bardzo ważném. Otóż tę trudność pokonywano dawniej, a mianowicie Euler i inni następującemi wybiegami:

Ponieważ znaleźliśmy $ah^2+b=k^2$, a $ax^2+b=y^2$, odjąwszy pierwsze od drugiego zrównania, znajdziemy $a(x+h)(x-h)=(y+k)(y-k)$. To zrównanie rozmnożywszy przez pq, możemy potem położyć

$$ap(x+h)=q(y+k)$$
$$q(x-h)=p(y-k)$$

Z tych dwóch zrównań znajdzie się łatwo

$$x=\frac{2kpq}{ap^2-q^2}-\frac{(ap^2+q^2)h}{ap^2-q^2}$$

$$y=\frac{k(ap^2+q^2)}{ap^2-q^2}-\frac{2ahpq}{ap^2-q^2}$$

Ta robota atoli nie zdaje się prowadzić nas do celu, bo mając znaleźć x i y całkowite, my przyszliśmy do wartości ułamkowych. Zachodzi przeto teraz pytanie jakie wartości wziąć potrzeba za dowolnie przybrane p i q, żeby postać ułamkowa znikła, a zostały wyrażenia na x i y pod postacią liczb całkowitych.

~~[illegible]~~ Odpowiedź na to pytanie jest może jeszcze trudniejszą, niż poprzednie, jednak z uwagi że x i y powinny być pod postacią liczb całkowitych, nasuwa się zaraz na myśl, położenie wyrażeń ułamkowych z których się wartości x i y składają pod postacią liczb całkowitych, mianowicie: położywszy $\frac{ap^2+q^2}{ap^2-q^2}=m$, zaś $\frac{2pq}{ap^2-q^2}=n$, otrzymamy $x=kn-hm$, $y=km-ahn$. Lubo teraz mamy wyrażone x i y pod postacią liczb całkowitych, to przecież nie możemy za nieoznaczone m i n brać jak zwyczajnie robiliśmy liczb dowolnych, gdyż te muszą dopełnić warunku jaki założyliśmy, t. j. muszą być równe powyższym wyrażeniom ułamkowym. ~~[illegible]~~ Lecz wziąwszy ich kwadraty, znajdziemy takowe

$$m^2=\frac{a^2p^4+2ap^2q^2+q^4}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4},\quad n^2=\frac{4p^2q^2}{a^2p^4-2ap^2q^2+q^4}$$

z których otrzymujemy $m^2-an^2=1$, z czego się pokazuje że dwie całkowite liczby m i n powinny być takie żeby było $m^2=an^2+1$ t. j. żeby an^2+1 było dokładnym kwadratem. Skoro więc liczbę h tak wyznaczyliśmy że $ah^2+b=k^2$ a potem liczbę n tak że $an^2+1=m^2$, wtedy mieć też będziemy $x=nk-mh$ a następnie i $ax^2+b=y^2$ w liczbach całkowitych. Aby otrzymać nowe rozwiązanie z co dopiero znalezionego, dosyć jest wziąć za h, $nk+mh$ i za k, $mk+nah$, bo z temi wartościami h i k otrzymamy nowe wartości x i y rozwiązujące zrównanie $ax^2+b=y^2$. Z ostatniemi wartościami postąpiwszy znowu jak z poprzedzającemi, znajdziemy znowu inne i t. d.

Szukajmy np. całkowitych wartości x i y rozwiązujących zrównanie $5x^2+4=y^2$, tedy wziąwszy $x=3$, znajdziemy $y=7$ albo raczej $h=3$, $k=7$. Położywszy dalej w zrównaniu $an^2+1=m^2$ czyli $5n^2+1=m^2$, $n=4$, znajdziemy $m=9$ przeto $x=kn-hm=1$, $y=km-ahn=3$ i jest rzeczywiście $5.1^2+4=3^2$. Położywszy

7 czyli $4k+3h=55$, 7 czyli $9k+20h=123$,

dalej za h, $kn+hm$ [$=55$] a za k, $km+ahn$ [$=123$], znajdziemy nowe x i y t. j. $x=492-495=-3$ a $y=1107-1100=7$ i jest $5x^2+4=5.3^2+4=7^2$. Biorąc znowu ~~$h=55$ a $k=123$ otrzymamy $x=492-495=$~~ $h=492+495=987$ a zaś $k=1107+1100=2207$, znajdziemy $x=8828-8883=-55$, $y=19863-19740=123$

a $5x^2+4=5.55^2+4=123^2$ i t. d.

Ten wybieg lubo nie trudny, dosyć jednak że prowadzi do celu, dość wiele wymaga. Zachodzi następnie ~~[illegible]~~ krótszym wybiegiem możnaby dopiąć tegoż samego celu. Ponieważ być naprzód powinno $ax^2+b=y^2$, a przez próbowanie znalazło się $ah^2+b=k^2$, z tych więc zrównań wypada $y^2-ax^2=k^2-ah^2$. Te nie zrównania uczyniłoby się zadość układem jak to zaraz widzimy, $y=k$ a $x=h$, alebyśmy tym sposobem nie otrzymali nowych wartości tylko te które już znamy. Przypuśćmy więc że już znamy taką liczbę n że $an^2+1=m^2$ skąd $m^2-an^2=1$. ~~[illegible]~~ W ostatniem zrównaniu możemy drugą jego stronę rozmnożyć przez m^2-an^2 bez naruszenia równości; będzie przeto $y^2-ax^2=(k^2-ah^2)(m^2-an^2)=k^2m^2-ak^2n^2-ah^2m^2+a^2h^2n^2$. Położywszy teraz $y=mk+ahn$, wypadnie z ostatniego zrównania $x^2=(hm+kn)^2$ t. j. $x=kn+hm$ a następnie $y=mk+anh$. t. j. wartości

jakie wyżej otrzymaliśmy bo znaki drugich wyrazów nie stanowią różnicy. Weźmyż tu przykład pojedyńczy $5x^2+4=y^2$, tedy zaraz widzimy że wziąwszy $h=1$, będzie $k=3$, możnaby też wziąć $h=0$ byłoby $y=2$ t.j. $k=2$. Zostańmy przy pierwszych wartościach, ponieważ jeszcze dopełnić musimy warunku $an^2+1=m^2$ t.j. $5n^2+1=m^2$, łatwo dostrzeżemy że biorąc $n=4$, znajdziemy $m=9$; mieć zatem będziemy $x=4k+9h$ a $y=9k+20h$. Położywszy tu pierwsze wartości $h=1$, $k=3$, znajdziemy $x=21$, $y=47$. Pierwszy z tych wartości biorąc za nowe h a drugą za k t.j. kładąc $h=21$ a $k=47$, znajdziemy nowe $x=377$, $y=843$. Kładąc dalej $h=377$, $k=843$, znajdziemy $x=6765$, $y=15127$ i t.d.

Weźmy jeszcze jeden przykład, szukając liczb całkowitych których kwadrat 7 razy wzięty i powiększony o 2 daje na sumę liczbę kwadratową. Według warunku mamy rozwiązać równanie $7x^2+2=y^2$ w liczbach całkowitych. Wziąwszy $h=1$ będzie $7.1^2+2=9=k^2$ zatem $k=3$, warunku zaś $7n^2+1=m^2$ dopełnimy biorąc $n=3$, skąd wypadnie $m=8$, zatem

$$x=8h+3k\,,\quad y=8k+21h$$

Z tych wartości sposobem jak wyżej znajdziemy następne rozwiązania

$$x=1,\ 17,\ 271,\ 4319,\ 68833\ \text{ i t.d.}$$
$$y=3,\ 45,\ 717,\ 11427,\ 182115$$

§15. Dotąd potrafiliśmy trójmian $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ uczynić dokładnym kwadratem w liczbach całkowitych, wyrzucając z niego wyraz βx i zamieniając go na dwumian ax^2+b, atoli obejść się można i bez tego zubieżenia rzeczonego wyrazu ale zato potrzebnem jest koniecznie poznanie jakiej bądź wich całkowitej wartości x czyniącej zarazem trójmian dokładnym kwadratem. Bo jeżeli $x=h$ jest takiem, że $\alpha+\beta h+\gamma h^2=k^2$ a zaś $\alpha+\beta x+\gamma x^2=y^2$ tedy po odjęciu tych równań od siebie znajdziemy $y^2-k^2=\beta(x-h)+\gamma(x^2-h^2)$, a rozmnożywszy to równanie przez pq, rozłożyć je potem możemy na dwa następujące: $p(y+k)=q(\gamma x+\gamma h+\beta)$ i $q(y-k)=p(x-h)$. Mnożąc tu pierwsze równanie przez q a drugie przez p i potem ~~pierwsze~~ drugie od ~~drugiego~~ pierwszego odejmując znajdziemy

$$x=\frac{2kpq}{\gamma q^2-p^2}-\frac{(\gamma q^2+p^2)h}{\gamma q^2-p^2}-\frac{\beta q^2}{\gamma q^2-p^2}$$

Tę wartość położywszy wyżej za x, otrzymamy

$$q(y-k)=p(x-h)=p\left(\frac{2kpq}{\gamma q^2-p^2}-\frac{2\gamma hq^2}{\gamma q^2-p^2}-\frac{\beta q^2}{\gamma q^2-p^2}\right)$$

skąd

$$y=\frac{k(\gamma q^2+p^2)}{\gamma q^2-p^2}-\frac{2\gamma hpq}{\gamma q^2-p^2}-\frac{\beta pq}{\gamma q^2-p^2}$$

Chcąc w tej na y wartości zniszczyć mianowniki, aby otrzymać y w postaci liczby całkowitej, połóżmy $\frac{\gamma q^2+p^2}{\gamma q^2-p^2}=m$ a $\frac{2pq}{\gamma q^2-p^2}=n$, tedy znajdziemy

$$m+1=\frac{2\gamma q^2}{\gamma q^2-p^2}\quad\text{czyli}\quad\frac{q^2}{\gamma q^2-p^2}=\frac{m+1}{2\gamma}\quad\text{a następnie}$$

$$x=nk-mh-b\frac{m+1}{2\gamma}$$

$$y=mk-n\gamma h-\tfrac{1}{2}bn$$

gdzie m i n muszą być tak dobrane albo raczej tylko n, żeby warunek $\gamma n^2+1=m^2$ był dopełnionym. Lecz wartości x i y zawierają jeszcze ułomki i dlatego nie czynią zadość warunkowi iżby były pod postacią liczb całkowitych, atoli przechodząc z tych pierwszych do następujących wartości, pomimo to te ostatnie będą w postaci liczb całkowitych. Ale i tych ułomków pozbyć się można z wartości x i y wracając do pierwotnie wprowadzonych niewiadomych p i q i przyjmując takowe tak żeby $\gamma q^2+1=p^2$, w takim bowiem razie ułomki same z siebie odpadną, gdy

$\gamma q^2 - p^2 = -1$ t. j. mianownik wspólny obu wartościom stanie się $= -1$, a same wartości przejdą na następujące

$$x = -2kpq + h(\gamma q^2 + p^2) + \beta q^2$$
$$y = -k(\gamma q^2 + p^2) + 2\gamma hpq + \beta pq$$

A ponieważ w równaniu $\alpha + \beta h + \gamma h^2 = k^2$ ilość k tylko się w kwadracie znajduje, wszystko więc jest jedno czyli weźmiemy też ilość dodatnią lub odjemną; a zatem wartości x i y będą ostatecznie

$$x = 2kpq + h(\gamma q^2 + p^2) + \beta q^2$$
$$y = k(\gamma q^2 + p^2) + 2\gamma hpq + \beta pq$$

które z pewnością dopełnią warunku $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = y^2$.

Gdyby ~~np~~ żądano rozwiązać równanie $8 + 5x + 3x^2 = y^2$, tedy położywszy $x = h = 1$, znajdziemy $8 + 5.1 + 3.1^2 = 16$ zatem $k = 4$. Warunku $\gamma q^2 + 1 = p^2$ czyli $3q^2 + 1 = p^2$ dopełniamy biorąc $q = 1$ i znajdziemy $p = 2$, przeto wartości rozwiązujące żądane równanie są: $x = 4k + 7h + 5$, $y = 7k + 12h + 10$ z których wypadają następne rozwiązania, kładąc zawsze dla nowych wartości x i y, za h poprzedzające x a za k poprzedzające y.

$$x = 1,\ 28,\ 401,\ 5596,\ 77953 \quad \text{i t. d.}$$
$$y = 4,\ 50,\ 696,\ 9694,\ 135020$$

Aby te rozwiązania niezależnie od wzorów na x i y dowolnie pociągnąć można, ~~S~~ tedy wysławiwszy ogólnie te rozwiązania następnie

$x = h,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ E'$, i t. d.
$y = k,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T$,

jest oczywiście $A = nk + mh$ gdzie m i n wiadome z warunku $\gamma n^2 + 1 = m^2$

$B = nP + mA$	$P = mk + \gamma nh$
$C = nQ + mB$	$Q = mP + \gamma nA$
$D = nR + mC$	$R = mQ + \gamma nB$
$E = nS + mD$	$S = mR + \gamma nC$
$E' = nT + mE$	$T = mS + \gamma nD$

i t. d.

~~Ponieważ~~ Te wartości idą, jak widzimy, według pewnego prawa, ~~...~~ bez dostrzegamy ~~...~~ że ani x bez y, ani też y bez x wyznaczyć nie można; ~~...~~ [Spróbujmy je, dnak czyli] z dostrzeżonego prawa nie wyprowadzić skróceń i te łatwiej porachować następnych wartości. ~~...~~ Ponieważ ~~np~~

$$E = nS + mD = n(mR + \gamma nC) + m(nR + mC) = 2mnR + (\gamma n^2 + m^2)C, \text{ a } nR = D - mC$$

$$E = nS + mD = n(mR + \gamma nC) + m(nR + mC) = 2mD - (m^2 - \gamma n^2)C. \text{ Lecz } m^2 - \gamma n^2 = 1$$

będzie zatem $E = 2mD - 2m^2C + \gamma n^2 C + m^2 C = 2mD - (m^2 - \gamma n^2)C$

zatem $E = 2mD - C$

Podobnież, $T = mS + \gamma nD = mS + \gamma n(nR + mC) = mS + \gamma n^2 R + \gamma mnC$

Lecz $\gamma nC = S - mR$, zatem

$$T = mS + \gamma n^2 R + mS - m^2 R = 2mS + (\gamma n^2 - m^2)R = 2mS - R \text{ bo } \gamma n^2 - m^2 = -1$$

A tak widzimy, że każdą następną wartość x znajdziemy z dwóch poprzedzających nie potrzebując wartości y jak wyżej, i również z dwóch poprzednich wartości y, znajdziemy następną niepotrzebując wartości x.

§16. Z tego co się dotąd powiedziało o rozwiązaniu równania $ax^2 + b = y^2$ a zatem i równania $x^2 - By^2 = Az^2$, widzieliśmy jakiemi manowcami przychodzono naprzód do jego rozwiązania w liczbach całkowitych. Wszystkie atoli usiłowania byłyby daremnemi, gdybyśmy do każdej liczby a nie mogli znaleźć innej takiej, żeby $an^2 + 1 = m^2$. Całe więc rozwiązanie równania $ax^2 + b = y^2$ zależy od równania $an^2 + 1 = m^2$; rozwiązanie też równania $x^2 - By^2 = \text{B}z^2$ ~~...~~ a następnie i równania $\xi^2 - Av^2 = B\zeta^2$ [w liczbach całkowitych] zależy od rozwiązania równania $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, przy czem ostrzedz jeszcze wypada, że tu liczba A nie może być ani kwadratem ani też odjemną gdyżby w takim razie $Ay^2 \pm 1$ nie mogło być kwadratem, bo nie masz dwóch liczb kwadratowych różniących się tylko o 1, a iloczyn an^2 dwóch kwadratów, jest także kwadratem.

Jeśli zatém liczba a lub A nie jest kwadratem ani odjemną, natenczas można zawsze znaleść liczbę n taką że an^2+1 będzie dokładnym kwadratem; a skoro jest taka liczba znajdzie, już jest, jak widzieliśmy, łatwo znaleść nieskończoną liczbę takich, które rozwiązują zrównanie $ax^2+b=y^2$. Żeby atoli dopiąć celu, nie rozwiązania rzeczonego zrównania, dosyć jest poznać jedną tylko taką liczbę i to najmniejszą. Wszystkie usiłowania należało zwrócić do znalezienia dla każdej liczby a niebędącej kwadratem ani odjemną, takiej liczby n najmniejszej, żeby, jak powiedziano, było $an^2+1=m^2$.

Angielski matematyk Pell, podał na ten koniec sposób który wprawdzie jest bardzo mozolnym, (a nie ogólnym) dla każdej liczby a nowego, a często bardzo długiego rachunku wymagającym. Żeby dać uczniom się poznać sposób Pella, weźmy tylko jeden przypadek t. j. że mamy znaleść liczbę n taką, żeby $13n^2+1$ było dokładnym kwadratem; więc tu $a=13$ i powinno być $13n^2+1=m^2$.

Ponieważ, jak widzimy $m>3n$, zatém połóżmy $\sqrt{13n^2+1}=3n+p$, a znajdziemy $n=\frac{3p+\sqrt{13p^2-4}}{4}>\frac{6}{4}p>p$, a dlatego połóżmy znowu $n=p+q$ t. j. połóżmy $p+q=\frac{3p+\sqrt{13p^2-4}}{4}$ czyli $p+4q=\sqrt{13p^2-4}$ skąd znajdziemy $p=\frac{q+\sqrt{13q^2+3}}{3}$. Tu znowu widocznie jest $p>\frac{q+3q}{3}>q$, dlatego połóżmy $p=q+r$, t. j. $q+r=\frac{q+\sqrt{13q^2+3}}{3}$ czyli $2q+3r=\sqrt{13q^2+3}$, skąd $q=\frac{2r+\sqrt{13r^2-3}}{3}$, więc $q>\frac{2r+3r}{3}>r$, połóżmy przeto $q=r+s=\frac{2r+\sqrt{13r^2-3}}{3}$ t. j. $r+3s=\sqrt{13r^2-3}$ skąd $r=\frac{s+\sqrt{13s^2+4}}{4}>\frac{s+3s}{4}>s$ kładziemy więc znowu $r=s+t$ przez co będzie $s+t=\frac{s+\sqrt{13s^2+4}}{4}$ czyli $3s+4t=\sqrt{13s^2+4}$, skąd znajdzie się $s=3t+\sqrt{13t^2-1}>3t+3t>6t$, a dlatego połóżmy $s=6t+u=3t+\sqrt{13t^2-1}$, skąd $3t+u=\sqrt{13t^2-1}$, zatém $t=\frac{3u+\sqrt{13u^2+4}}{4}>\frac{6u}{4}>u$, przeto połóżmy dalej $t=u+v$, a otrzymamy $u+4v=\sqrt{13u^2+4}$, skąd wypada $u=\frac{v+\sqrt{13v^2-3}}{3}>\frac{4}{3}v>v$ i dlatego kładziemy $u=v+x=\frac{v+\sqrt{13v^2-3}}{3}$ czyli $2v+3x=\sqrt{13v^2-3}$. Z tego tu zrównania otrzymamy $v=\frac{2x+\sqrt{13x^2+3}}{3}>\frac{5}{3}x>x$ i dlatego kładziemy $v=x+y$, a będzie $x+y=\frac{2x+\sqrt{13x^2+3}}{3}$ czyli $x+3y=\sqrt{13x^2+3}$ skąd $x=\frac{y+\sqrt{13y^2-4}}{4}>y$ więc $x=y+z=\frac{y+\sqrt{13y^2-4}}{4}$ albo $3y+4z=\sqrt{13y^2-4}$, skąd $y=3z+\sqrt{13z^2+1}$. Przy środkach do takiego jak ostatnie wyrażenia, gdzie oczywiście widzimy co położyć potrzeba za z iżby dwumian pod pierwiastkiem był dokładnym kwadratem, podalsze podstawiania się kończą. A ponieważ w ostatniej wartości na y, położywszy $z=0$, otrzymamy $y=1$, a zatém liczbę całkowitą, więc wracając do wartości n, mamy: $x=y+z=1+0=1$, $v=x+y=2$, $u=v+x=3$, $t=u+v=5$, $s=6t+u=33$, $r=s+t=38$, $q=r+s=71$, $p=q+r=109$, a nareszcie $n=p+q=180$ więc $m=649$. Najmniejszą więc liczbą dopełniającą warunku $13n^2+1=m^2$ jest liczba 180, a znalezienie jej sposobem podanym przez Pella nie mało mozolne i ten mozół z rosnącą liczbą a coraz wzrastać będzie, bo np. gdyby było $a=61$, najmniejszemi liczbami dopełniającemi warunku $61n^2+1=m^2$ są $n=226153980$, $m=1766319049$.

Aby rzeczonego mozołu oszczędzić, ułożono tablice najmniejszych liczb n i m dopełniających warunku $an^2+1=m^2$ dla różnych liczb a, o których w dalszym ciągu powiemy.

Zrównanie $m^2-an^2=1$ albo $an^2-m^2=-1$, lub, co na jedno wychodzi, zrównanie $x^2-Ay^2=1$, podał pierwszy Fermat, francuzki matematyk, (wprawdzie na przekór) angielskim matematykom do rozwiązania w liczbach całkowitych; rzeczywiście atoli rozwiązał je dopiero Lagrange w całej ogólności i ścisłości matematycznej. Do tego więc rozwiązania i my teraz przystąpimy.

§17. Ponieważ rozwiązanie rzeczonego równania oparł Lagrange na ułomkach ciągłych, przeto i nam poświęcić się potrzeba do tychże. Stosując w Arytmetyce ułomki ciągłe do wyciągania pierwiastku kwadratowego z liczb nie będących kwadratami, dostrzegliśmy także, że ~~[illegible]~~ pierwiastek niewymierny rozwinięty na ułomek ciągły, przedstawia zawsze ułomek peryjodyczny ciągnący się bez końca. Ta peryjodyczność pomogła nam tylko do tego, że znalazłszy jeden całkowity peryjod, mogliśmy bez rachunku prowadzić dowolnie ułomek i tym sposobem znaleźć przybliżony pierwiastek tak dokładnie jak sobie tylko życzyliśmy, lub jak potrzeba wymagała, na różne zaś peryjody żadnej nie zwracaliśmy uwagi. Tak wyciągając $\sqrt{47}$, z $\sqrt{19}$ i $\sqrt{67}$, znajdziemy:

$$\sqrt{47} = 6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\text{i t. d.}}}}}}}}}$$

$$\sqrt{19} = 4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8\ldots}}}}}}}}}}}}$$

$$\sqrt{67} = 8+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\text{i t. d.}}}}}}}}}}}}}}}$$

W pierwszym z tych ułomków widzimy peryjod mianowników 1, 5, 1; 12, w drugim 2, 1, 3, 1, 2; 8, a w trzecim 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, (2), 5, 16. Co więcej dostrzegamy nawet w tych mianownikach symetryczność, opuszczając ostatni mianownik peryjodu; tak np. w drugim mającym nieparzystą liczbę wyrazów bo 5, środkowy mianownik jest 3 a po obu jego stronach stoją symetrycznie mianowniki 1, 2, w trzecim, także z nieparzystej liczby wyrazów złożonym, środkowym mianownikiem jest 7, a z jednej i drugiej jego strony idą symetrycznie w przeciwnych kierunkach mianowniki 1, 1, 2, 5. Gdyby peryjod, bez ostatniego wyrazu, złożony był z parzystej liczby wyrazów, zamiast jednego środkowego byłyby dwa sobie równe a inne po obu ich stronach symetrycznie rozłożone jak to widzieć można w następujących ułomkach

$$\sqrt{53} = 7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}}$$

$$\sqrt{61} = 7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}}}}}}}}$$

W dalszym ciągu zobaczymy że tak peryjodyczność jako też symetryczność ułomków wyrażających niewymierne pierwiastki kwadratowe są koniecznemi.

§18. Z wykładanego w Arytmetyce sposobu wyciągania pierwiastków kwadratowych za pomocą ułomków ciągłych jest wiadomo że rozwinięcie pierwiastku, albo ogólniej mówiąc, niewymiernej ilości $\sqrt{A}$ na ułomek ciągły, zależy na wyznaczeniu całkowitych liczb $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ zawartych w wyrażeniach $\sqrt{A}, x, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_{n-1}, x_n$ tak, żeby sprawdzały się równania $\sqrt{A} = a+\frac{1}{x}$, $x = a_1+\frac{1}{x_1}$; $x_1 = a_2+\frac{1}{x_2}$, $x_2 = a_3+\frac{1}{x_3}$ i t. d. $x_{n-1} = a_n+\frac{1}{x_n}$, $x_n = a_{n+1}+\frac{1}{x_{n+1}}$, bo wtedy oczywiście będzie

$$\sqrt{A} = a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\text{i t. d.}}}}$$

Ponieważ mamy $x = \frac{1}{\sqrt{A}-a}$, $x_1 = \frac{1}{x-a_1}$, $x_2 = \frac{1}{x_1-a_2}$, $x_3 = \frac{1}{x_2-a_3}$, i t. d. $x_n = \frac{1}{x_{n-1}-a_n}$, tudzież, ponieważ $x = \frac{\sqrt{A}+a}{A-a^2} = \frac{\sqrt{A}+Q_1}{P_1}$ kładąc $Q_1 = a$ a $P_1 = \frac{A-a^2}{1}$, więc położywszy tę wartość x w $x_1 = \frac{1}{x-a_1}$ za x, będzie

$$x_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{A}+Q_1}{P_1} - a_1} = \frac{P_1}{\sqrt{A}-(a_1P_1-Q_1)} = \frac{P_1\{\sqrt{A}+(a_1P_1-Q_1)\}}{A-(a_1P_1-Q_1)^2} = \frac{\sqrt{A}+Q_2}{P_2}$$ jeżeli dla krótkości

położymy $a_1P_1 - Q_1 = Q_2$ a zaś $\frac{A-Q_2^2}{P_1} = P_2$. Tę wartość kładzie w równaniu

$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2}$, zupełnie tąż samą drogą otrzymamy $x_2 = \frac{\sqrt{A}+Q_3}{P_3}$ które położymy

$a_2P_2 - Q_2 = Q_3$ a $\frac{A-Q_3^2}{P_2} = P_3$. Tymże samym sposobem postępując coraz dalej,

znajdziemy $x_3 = \frac{\sqrt{A}+Q_4}{P_4}$, które położymy $a_3P_3 - Q_3 = Q_4$ a $\frac{A-Q_4^2}{P_3} = P_4$

$x_4 = \frac{\sqrt{A}+Q_5}{P_5}$ .... $a_4P_4 - Q_4 = Q_5$ ... $\frac{A-Q_5^2}{P_4} = P_5$

$x_5 = \frac{\sqrt{A}+Q_6}{P_6}$ .... $a_5P_5 - Q_5 = Q_6$ ... $\frac{A-Q_6^2}{P_5} = P_6$

. . . .

$x_n = \frac{\sqrt{A}+Q_{n+1}}{P_{n+1}}$ .... $a_nP_n - Q_n = Q_{n+1}$ ... $\frac{A-Q_{n+1}^2}{P_n} = P_{n+1}$

Uważmy teraz że dla

$Q = 0$ i $P = 1$ jest a największą całkowitą zawartą w $\sqrt{A}$

dla $Q_1 = a$ i $P_1 = \frac{A-Q_1^2}{P}$ ...... a_1 .... $\frac{\sqrt{A}+Q_1}{P_1}$

$Q_2 = a_1P_1 - Q_1$ i $P_2 = \frac{A-Q_2^2}{P_1}$ ...... a_2 .... $\frac{\sqrt{A}+Q_2}{P_2}$

$Q_3 = a_2P_2 - Q_2$ i $P_3 = \frac{A-Q_3^2}{P_2}$ ...... a_3 .... $\frac{\sqrt{A}+Q_3}{P_3}$

$Q_4 = a_3P_3 - Q_3$ i $P_4 = \frac{A-Q_4^2}{P_3}$ ...... a_4 .... $\frac{\sqrt{A}+Q_4}{P_4}$

. . . .

$Q_n = a_{n-1}P_{n-1} - Q_{n-1}$ i $P_n = \frac{A-Q_n^2}{P_{n-1}}$ ...... a_n .... $\frac{\sqrt{A}+Q_n}{P_n}$;

Tak np. w rozwinięciu $\sqrt{61}$, mamy $a=7$, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=1$, $a_5=2$, $a_6=2$, $a_7=1$, $a_8=3$, $a_9=4$, $a_{10}=1$, $a_{11}=14$, i t. d.

§ 19. Niechże teraz będzie $\sqrt{A} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x_n}}}}}}$

Ponieważ umiemy zwijać ułomek ciągły, z czego otrzymujemy wartości przybliżone i to coraz bliższe pierwiastka $\sqrt{A}$, oznaczmy więc przez $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ trzy po sobie następujące wartości przybliżone, odpowiadające ilorazom a_{n-1}, a_n, x_n†, tedy ponieważ oczywiście $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \sqrt{A}$ ‡ będzie też $\sqrt{A} = \frac{p_nx_n + p_{n-1}}{q_nx_n + q_{n-1}}$.

† w ten sposób

a_{n-1}	a_n	x_n
$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$	$\frac{p_n}{q_n}$	$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

‡ bo x_n uważamy za iloraz zupełny.

Ale wyżej widzieliśmy że wszystkie wartości $a, a_1, a_2, a_3 \dots x_n$ są pod jedną i tąż samą postacią $\frac{\sqrt{\alpha}+\beta}{\gamma}$, położywszy przeto x_n pod tęż postacią, mianowicie położywszy $x_n = \frac{\sqrt{A}+Q_{n+1}}{P_{n+1}}$ bo x_n następuje po a_n, i włożywszy tę wartość wyżej, otrzymamy $\sqrt{A} = \frac{p_n\left(\frac{\sqrt{A}+Q_{n+1}}{P_{n+1}}\right) + p_{n-1}}{q_n\left(\frac{\sqrt{A}+Q_{n+1}}{P_{n+1}}\right) + q_{n-1}} = \frac{p_n(\sqrt{A}+Q_{n+1}) + p_{n-1}P_{n+1}}{q_n(\sqrt{A}+Q_{n+1}) + q_{n-1}P_{n+1}}$

Zniósłszy mianownika i potem zrównawszy wyrazy wymierne osobno a niewymierne osobno, otrzymamy dwa następne równania

$$p_nQ_{n+1} + p_{n-1}P_{n+1} - q_nA = 0$$

$$q_nQ_{n+1} + q_{n-1}P_{n+1} - p_n = 0$$

z których rugując najprzód P_{n+1} a potem Q_{n+1}, znajdziemy

$$(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)Q_{n+1} = q_nq_{n-1}A - p_np_{n-1}$$

$$(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)P_{n+1} = p_n^2 - Aq_n^2$$

Ale wiemy że $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = \pm 1$, mianowicie jeżeli n jest nieparzyste, jest $+1$ a gdy parzyste, -1, więc zatem będziemy

$$\mp Q_{n+1} = Aq_nq_{n-1} - p_np_{n-1}$$

$$\mp P_{n+1} = p_n^2 - Aq_n^2$$

Z tych dwóch równań czytamy naocznie wyżej dostrzeżoną prawdę, że P_{n+1} i Q_{n+1} są zawsze liczbami całkowitemi.

Ponieważ też wiadomo że $\frac{p_n}{q_n} \lessgtr \sqrt{A}$ czyli $\frac{p_n^2}{q_n^2} \lessgtr A$ albo $p_n^2 \lessgtr Aq_n^2$ więc $p_n^2 - Aq_n^2$ jest dodatnem lub odjemnem według tego jak n jest parzystem lub nieparzystem, z czego wynika że P_{n+1} czyli liczby P_1, P_2, P_3, P_4 ..... są zawsze dodatne. A że z poprzednich wartości otrzymujemy $P_nP_{n+1} = A - Q_{n+1}^2$, przeto ponieważ iloczyn P_nP_{n+1} jest dodatnym, być koniecznie musi $Q_{n+1}^2 < A$ czyli $Q_{n+1} < \sqrt{A}$, i liczby przeto Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .... nigdy nie przewyższają wartości $\sqrt{A}$, a następnie poprzednio otrzymane ułamki $\frac{\sqrt{A}+Q_1}{P_1}$, $\frac{\sqrt{A}+Q_2}{P_2}$, $\frac{\sqrt{A}+Q_3}{P_3}$ i t. d. wszystkie są dodatne.

Że wszystkie liczby przez Q oznaczone są także dodatnemi, następnie można dowieść. Przyjmijmy że pewna z tych liczb Q_n jest dodatną, tedy, ponieważ a_n jest największą całkowitą zawartą w $\frac{\sqrt{A}+Q_n}{P_n}$, będzie naturalnie $2a_n > \frac{\sqrt{A}+Q_n}{P_n}$ czyli $2a_nP_n > \sqrt{A}+Q_n$. Lecz co dopiero widzieliśmy że $Q_n < \sqrt{A}$, więc tem więcej $2a_nP_n > 2Q_n$ czyli $a_nP_n > Q_n$, t. j. $a_nP_n - Q_n > 0$ czyli dodatne. Ale według początkowych zrównań $a_nP_n - Q_n = Q_{n+1}$ więc i Q_{n+1} jest liczbą dodatną. A że $Q_1 = a$ jest liczbą dodatną, zatem $Q_{1+1} = Q_2$, $Q_{2+1} = Q_3$, $Q_{3+1} = Q_4$ i t. d. są liczbami dodatnemi.

§20. Kiedy $Q_n < \sqrt{A}$ a największą liczbą całkowitą mieszczącą się w $\sqrt{A}$ jest a, zatem liczby oznaczone przez różne Q nigdy liczby a przewyższyć nie mogą; jest więc liczba a granicą wszystkich liczb przez Q oznaczonych.

Z wartości na Q na początku otrzymanych widzimy że $Q_n + Q_{n+1} = a_nP_n$, żadna zatem z liczb a_n, P_n nie może być większą niż $Q_n + Q_{n+1}$, czyli większą niż $2a$; jest przeto $2a$ granicą tak liczb a_1, a_2, a_3 .. jako też liczb P_1, P_2, P_3.. a dlatego tak liczby przez różne a oznaczone, jako też liczby oznaczone przez P mają ograniczoną a zatem skończoną liczbę wartości, oraz liczba różnych ich połączeń z sobą, musi także być ograniczoną. A że ułamek ciągły równający się niewymiernej ilości $\sqrt{A}$ idzie bez końca, zatem połączenie liczb P i Q, t. j. jeden z ułamków $\frac{\sqrt{A}+Q_1}{P_1}$, $\frac{\sqrt{A}+Q_2}{P_2}$, $\frac{\sqrt{A}+Q_3}{P_3}$ i t. d. musi znowu kiedyś powrócić, a następnie i pewna liczba mianowników a_1, a_2, a_3, a_4 ..... powrócić znowu musi i to w tym samym porządku i przedstawi się niewymierna liczba $\sqrt{A}$ jako ułamek peryodyczny.

Chcąc oznaczyć początek tego peryodu, przypuśćmy że że a_{n+1} jest pierwszym ~~powracającym~~ który już powraca, mianownikiem czyli ilorazem, tak że $a_{n+1} = a_{n+i+1}$, a następnie, że też $Q_{n+1} = Q_{n+i+1}$ i $P_{n+1} = P_{n+i+1}$. Ponieważ z początkowych wzorów §18. wiemy że

$$Q_{n+1} = a_nP_n - Q_n \quad \ldots\ldots \quad P_nP_{n+1} = A - Q_{n+1}^2$$

więc też

$$Q_{n+i+1} = a_{n+i}P_{n+i} - Q_{n+i} \quad \text{i} \quad P_{n+i}P_{n+i+1} = A - Q_{n+i+1}^2$$

Ale według przypuszczenia że mianownik a_{n+1} już powrócił i że zatem $a_{n+1} = a_{n+i+1}$, być też musi $P_{n+i+1} = P_{n+1}$ a $Q_{n+i+1} = Q_{n+1}$, dlatego przeto będzie także

$$P_{n+i}P_{n+i+1} = A - Q_{n+1}^2$$

a następnie $P_n = P_{n+i}$. Podobnież, ponieważ $Q_{n+1} = a_nP_n - Q_n$, oraz $Q_{n+1} = a_{n+i}P_n - Q_{n+i}$ odjąwszy przeto te dwa zrównania od siebie, wypada $0 = (a_n - a_{n+i})P_n - Q_n + Q_{n+i}$, skąd $\frac{Q_n - Q_{n+i}}{P_n} = a_n - a_{n+i}$, albo $\frac{Q_n - Q_{n+i}}{P_{n+i}} = a_n - a_{n+i}$, bo $P_n = P_{n+i}$. Lecz według zrównania ~~wyżej znalezionego~~ (poprzedniego §) $q_nQ_{n+1} + q_{n-1}P_{n+1} - p_n = 0$ jest też $q_{n-1}Q_n + q_{n-2}P_n = p_{n-1}$ czyli $Q_n = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}P_n$. A że $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ jest wartością przybliżoną pierwiastka $\sqrt{A}$, zaś w $\sqrt{A}$ największa całkowita jest a, położyć zatem możemy $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = a + \frac{r}{q_{n-1}}$, którą wartość położywszy wyżej za $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, będzie $Q_n = a + \frac{r - q_{n-2}P_n}{q_{n-1}}$ czyli $a - Q_n = \frac{q_{n-2}P_n - r}{q_{n-1}}$. Lecz z natury przybliżonych wartości jest $q_{n-2} < q_{n-1}$, więc też $a - Q_n < P_n$, jeden tylko wyjąwszy przypadek że $n = 0$, bo między wartościami przez q oznaczonemi nie znajduje się q_{-2}, a z powyższego także wiemy że $a - Q = a$, zaś $P = 1$ i dlatego nie jest ogólnie $a - Q_n < P_n$. Lecz dla $n = 1$, jest $a - Q_1 = 0$, przeto też jest oczywiście $a - Q_1 < P_1$.

Jak $a-2_n < P_n$, tak też $a-2_{n+i} < P_{n+i}$. Ale $P_n = P_{n+i}$, zatém $a-2_n < P_{n+i}$ i $a-2_{n+i} < P_n$. Lecz, jak wyżej dowiodło, ani 2_n ani też 2_{n+i} nie może być większém od a, a dlatego będzie $2_{n+i}-2_n < P_{n+i}$ albo $2_n-2_{n+i} < P_n$ czyli, dlatego jak $2_{n+i} \gtrless 2_n$, wypada że $\frac{2_n-2_{n+i}}{P_n} < 1$ i $\frac{2_{n+i}-2_n}{P_{n+i}} < 1$. Ale ponieważ $\frac{2_n-2_{n+i}}{P_{n+i}} = a_n - a_{n+i}$, tudzież $\frac{2_{n+i}-2_n}{P_n} = a_{n+i} - a_n$, a dwie liczby a_n i a_{n+i} są całkowitemi, różnica przeto ich koniecznie musi być $=0$, t.j. być koniecznie musi $a_n = a_{n+i}$ wyjmując tylko przypadek że $n=0$. Jeżeli więc $a_n = a_{n+i}$, być także musi $a_{n+1} = a_{n+i+1}$, i gdy mianownik a_{n+1} jest powrócił, tedy wnioskując następnie, znajdziemy:

$$a_{n+1} = a_{n+i+1} \text{ ------ } \sout{a_n = a_{n+i}}$$

$(a_n = a_{n+i})$, $a_{n-1} = a_{n+i-1}$, $a_{n-2} = a_{n+i-2}$, $a_{n-3} = a_{n+i-3}$, $a_{n-4} = a_{n+i-4}$, i t.d.

aż nareszcie przyjdziemy do $a_1 = a_{i+1}$. Uważać tu atoli należy że nie jest $a = a_i$, z czego widzimy że pierwszym powracającym mianownikiem czyli ilorazem jest a_1, i że każdy następny peryjod od niego się poczyna.

§21. Niech przybliżonej wartości $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ odpowiada iloraz a_{i-1}, a poprzednia przybliżona wartość niech będzie $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$, oraz zupełny iloraz stojący nad pierwszą wartością przybliżoną, niech będzie $a_i + z$, tedy następna po $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ przybliżona wartość będzie $\frac{p_i}{q_i} = \sqrt{A} = \frac{p_{i-1}(a_i+z)+p_{i-2}}{q_{i-1}(a_i+z)+q_{i-2}}$. Że a_i jest ostatnim ilorazem w peryjodzie, jest więc $z = \sqrt{A}+a$, której wartość położywszy za z, będzie

$$\sqrt{A} = \frac{p_{i-1}(\sqrt{A}+a_i-a)+p_{i-2}}{q_{i-1}(\sqrt{A}+a_i-a)+q_{i-2}}$$

Zniósłszy mianowniki i potém zrównawszy osobno wyrazy wymierne a osobno niewymierne, znajdziemy

$$Aq_{i-1} - (a_i-a)p_{i-1} - p_{i-2} = 0$$

$$p_{i-1} - (a_i-a)q_{i-1} - q_{i-2} = 0$$

Z drugiego z tych zrównań wypada $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = a_i - a + \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$. Ponieważ ułamek $\frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$ jest właściwym bo $q_{i-2} < q_{i-1}$, zatém $a_i - a$ wyraża największą liczbę całkowitą zawartą w $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$. Lecz jak w każdej z przybliżonych wartości $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$, $\frac{p_4}{q_4}$, i t.d. tak też i w wartości $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ mieści się największa liczba całkowita a, dlatego jest $a_i - a = a$, przeto $a_i = 2a$, z czego wniesiemy że ostatni mianownik czyli iloraz peryjodu jest zawsze $= 2a$, co też po wszystkowych liczbowych przykładach naocznie widzieliśmy.

W wyżej otrzymaném zrównaniu $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = a_i - a + \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$ położywszy $a_i = 2a$ otrzymamy $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - a = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$. Niechże a_i będzie granicą pierwszego peryjodu, tedy

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - a = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{i-1}}}}}$$

Lecz łatwo dowieść (*) że

$$\frac{q_{i-2}}{q_{i-1}} = \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_{i-2} + \cfrac{1}{a_{i-3} + \dots + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}}}$$

dwa więc te ułamki według ostatniego zrównania są sobie równe, a następnie $a_1, a_2, a_3 \dots a_{i-3}, a_{i-2}, a_{i-1}$ i $a_{i-1}, a_{i-2}, a_{i-3} \dots a_3, a_2, a_1$ są też same

*) Niech $\frac{p}{q} = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \dots}}}$ będzie ułamkiem właściwym rozwiniętym na ułamek ciągły, niech ilorazy będą α, β, γ ------ $\varkappa$, λ, μ, wartości przybl. $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$ ------ $\frac{p'''}{q'''}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p}{q}$, tedy wiemy że

$q = q'\mu + q''$ … przeto $\frac{q}{q'} = \mu + \frac{q''}{q'}$ a następnie $\frac{q'}{q} = \frac{1}{\mu + \frac{q''}{q'}}$

$q' = q''\lambda + q'''$ … $\frac{q'}{q''} = \lambda + \frac{q'''}{q''}$ ------ $\frac{q''}{q'} = \frac{1}{\lambda + \frac{q'''}{q''}}$ (F $\frac{q'''}{q''} = \frac{1}{\varkappa + \frac{q''''}{q'''}}$) i t.d. ⌉

$q'' = q'''\varkappa + q''''$ … $\frac{q''}{q'''} = \varkappa + \frac{q''''}{q'''}$ ------ F

i t.d.

⌉ zatém $\frac{q'}{q} = \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\varkappa + \dots + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\alpha}}}}}$

t.j. ułamek właściwy $\frac{q'}{q}$ rozwinąwszy na ułamek ciągły otrzyma się też same ilorazy jak z ułamka $\frac{p}{q}$, tylko w odwrotnym ~~[illegible]~~ porządku; jeżeli przeto gdzie taki przypadek natrafimy, będzie to dowodem że $\frac{p}{q} = \frac{q'}{q}$ czyli $p = q'$; nawzajem, jeżeli znajdziemy dwie po sobie następujące wartości przybliżone $\frac{p'}{q'}$ i $\frac{p}{q}$ takie że $p = q'$, pewnymi być możemy że ilorazy czyli mianowniki wracać będą symetrycznie.

szereg więc ilorazów czyli mianowników ciągłego ułomka, opuszczając pierwszy, nietylko jest peryjodycznym ale i symetrycznym jak na początku twierdziłem i jak z liczbowych przykładów tamże przywiedzionych bez trudności dostrzedz można, jakotéż i to, że mianownik końcowy peryjodu jest $=2a$. Tak w pierwszym przykładzie peryjod jest $1, 5, 1, 12 = 2.6$, w drugim $2, 1, 3, 1, 2, 8 = 2.4$ w trzeciem nareszcie $5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16 = 2.8$.

Ponieważ dla wyrazu końcowego peryjodu jest $Q_i + Q_{i+1} = a_i P_i$ stósownie do zrównania $Q_{n+1} = a_n P_n - Q_n$, zaś $a_i = 2a$, tudzież Q_i, Q_{i+1} i P_i są liczbami całkowitemi i oprócz tego dwie pierwsze nigdy nie mogą być większe od a, więc naturalny stąd wypływa wniosek że $Q_i = Q_{i+1} = a$, zaś $P_i = 1$. W zrównaniu $\mp P_{n+1} = p_n^2 - Aq_n^2$ położywszy $n = i-1$, będzie $\mp P_i = p_{i-1}^2 - Aq_{i-1}^2$; to jest $p_{i-1}^2 - Aq_{i-1}^2 = \pm 1$ według tego jak $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \gtrless \sqrt{A}$.

§22. Tak przysposobiwszy i udowodniwszy wszystko co nam w dalszym ciągu potrzebném będzie, weźmy teraz do rozwiązania w liczbach całkowitych zrównanie

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1$$

w którém liczba (całkowita) A nie może być ani odjemną ani dokładnym kwadratem. Gdyby bowiem była odjemną, mielibyśmy $x^2 + Ay^2 = \pm 1$. Lecz zrównanie $x^2 + Ay^2 = +1$ rozwiązują tylko wartości $x = 1$, $y = 0$, zrównanie zaś $x^2 + Ay^2 = -1$ jest całkiem niepodobném; przeto ponieważ zero do liczb zaliczyć nie możemy, a jedyne rozwiązanie dla $x = 1$, $y = 0$ jest tak dobre jak żadném, bo nam rzeczywiście chodzi o rozwiązanie ogólne, uwaga przeto względem A jest sprawiedliwą iż odjemną liczbą być nie może. Że ani może być dokładnym kwadratem, łatwo się także przekonać; przypuściwszy bowiem że $A = a^2$, z założonego zrównania otrzymamy dwa następujące

$$(x+ay)(x-ay) = +1 \quad \text{i} \quad (x+ay)(x-ay) = -1.$$

Pierwszemu uczynimy zadosyć biorąc $x + ay = +1$ i $x - ay = +1$, a z których z tych ostatnich otrzymamy jedyne tylko rozwiązanie $x = 1$, $y = 0$. Według drugiego z poprzednich zrównań mielibyśmy $x + ay = \mp 1$ i $x - ay = \pm 1$ albo téż $x + ay = +1$ i $x - ay = -1$; w pierwszym razie znajdziemy $x = 0$, $y = -\frac{1}{a}$, w drugim zaś $x = 0$ i $y = \frac{1}{a}$ jako także jedyne rozwiązania. Jest zatém słuszne i drugie twierdzenie, że liczba A nie może być kwadratem jeżeli zrównanie $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ ma być rozwiązaném w liczbach całkowitych.

§23. Takie zrobiwszy zastrzeżenia albo raczej warunki względem liczby A, przystąpmy już nareszcie do rozwiązania wyżej założonego zrównania i to naprzód zrównania $x^2 - Ay^2 = +1$. W tym celu rozwińmy $\sqrt{A}$ na ułomek ciągły, a oznaczywszy przez $\frac{p}{q}$ pewną przybliżoną jego wartość odpowiadającą ilorazowi czyli mianownikowi a_{i-1}, przypuśćmy że liczba wyrazów peryjodu, a zatem i i jest parzystem, tedy, według tego co się wyżej powiedziało, jest zawsze $p^2 - Aq^2 = +1$ i wszystkie następne wartości przybliżone odpowiadające takim ilorazom jak a_{i-1}, rozwiążą to ostatnie zrównanie w liczbach całkowitych. Jeżeli i oznacza liczbę wyrazów peryjodu i jest nieparzystem, natenczas

$$a_{i-1}, \quad a_{2i-1}, \quad a_{3i-1}, \quad a_{4i-1}, \quad a_{5i-1}, \quad a_{6i-1}, \quad \text{i t. d.}$$

oznaczać naturalnie będą przedostatnie mianowniki, następujących po sobie peryjodów; że przyjęliśmy i nieparzyste, zatém, a_{i-1}, a_{3i-1}, a_{5i-1} i t. d. będą na miejscach parzystych, zaś a_{2i-1}, a_{4i-1}, a_{6i-1} i t. d. na miejscach nieparzystych, a dlatego przybliżone wartości ułomka ciągłego, t. j. wartości $\frac{p}{q}$ odpowiadające pierwszym mianownikom, rozwiążą zrównanie $x^2 - Ay^2 = -1$, odpowiadające zaś drugim, rozwiążą zrównanie $x^2 - Ay^2 = +1$ w liczbach całkowitych. Tym sposobem w każdym razie przynajmniej jedno ze zrównań (zawsze) rozwiązaném będzie

Z całego tego rozumowania przekonywamy się, że przybliżona wartość $\frac{p}{q}$ stojąca pod ilorazem $2a$ w którymkolwiek peryjodzie sprawdza jedno ze zrównań $p^2-Aq^2=+1$, $p^2-Aq^2=-1$, dlatego że kiedy $a_i=2a$, $Q_i=Q_{i+1}=a$ a $P_i=1$, ~~to~~ zrównanie wyżej dowiedzione $\mp P_i=p_{i-1}^2-Aq_{i-1}^2$, przechodzi na $p^2-Aq^2=\pm 1$. Nadmieniać tylko potrzeba że ~~jako~~ w przypadku $\frac{p}{q}>\sqrt{A}$ zrównanie to jest $p^2-Aq^2=+1$, w przypadku zaś $\frac{p}{q}<\sqrt{A}$, $p^2-Aq^2=-1$.

Ponieważ w rozwinięciu $\sqrt{A}$ na ułamek ciągły, iloraz $2a$ koniecznie znajdować się musi, zatém zrównanie $x^2-Ay^2=\pm 1$ w każdym przypadku rozwiązaném być może w liczbach całkowitych, przynajmniej ze znakiem $+1$ jakakolwiek byłaby liczba A byle całkowita i niezupełny kwadrat. Że iloraz $2a$ powtarza się nieskończoną liczbę razy w następnych peryjodach, dlatego też będzie nieskończona liczba rozwiązań tegoż zrównania.

Jeżeli liczba mianowników peryjodu, które oznaczmy przez $\alpha, \beta, \gamma \ldots \gamma, \beta, \alpha, 2a$, jest parzystą, każda przybliżona wartość stojąca pod ilorazem $2a$ w różnych peryjodach jest większą niż $\sqrt{A}$; w tym przeto przypadku rzeczone wartości rozwiążą tylko zrównanie $x^2-Ay^2=+1$, kładąc $x=p$ a $y=q$. Jeżeli zaś liczba wyrazów czyli mianowników w peryjodzie jest nieparzystą, natenczas wartość $\frac{p}{q}$ stojąca pod $2a$ w pierwszym trzecim, piątym i t.d. peryjodzie, będzie mniejszą niż $\sqrt{A}$, stojąca zaś w drugim, czwartym, szóstym i t.d. peryjodzie pod tymże ilorazem, będzie większą niż $\sqrt{A}$, jak to już widzieliśmy; w takim razie tak zrównanie $x^2-Ay^2=-1$ jako też $x^2-Ay^2=+1$ będzie mogło być rozwiązaném, pierwsze przez wartości porządku nieparzystego, a drugie parzystego.

§ 24. Weźmyż już nareszcie przykłady, a naprzód zrównanie $x^2-13y^2=\pm 1$ które już rozwiązaliśmy za pomocą sposobu podanego przez Pella i znaleźliśmy $x=649$, $y=180$ jako liczby najmniejsze rozwiązujące zrównanie $x^2-13y^2=+1$. Obecnie położyłem ± 1 bo jeszcze niewiemy czyli z obu znakami czyli też tylko z jednym $+$ to zrównanie rozwiązaném być może.

Rozwijając $\sqrt{13}$ na ułamek ciągły, szukamy tylko ilorazów a to według zrównań $Q_{n+1}=a_nP_n-Q_n$, $P_{n+1}=\frac{A-Q_{n+1}^2}{P_n}$, mieć przeto będziemy

$$\sqrt{13}=\frac{\sqrt{13}+0}{1}=3=a$$

$$\frac{\sqrt{13}+3}{4}=1=a_1$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{3}=1=a_2$$

$$\frac{\sqrt{13}+2}{3}=1=a_3$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{4}=1=a_4$$

$$\frac{\sqrt{13}+3}{1}=6=a_5=2a$$

i t.d.

Jest więc $\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}}}$

Szukając teraz wartości przybliżonych mamy:

3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6	……
$\frac{1}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{119}{33}$	$\frac{137}{38}$	$\frac{256}{71}$	$\frac{393}{109}$	$\frac{649}{180}$	$\frac{4287}{1189}$	$\frac{4936}{1369}$	$\frac{9223}{2558}$	$\frac{14159}{3927}$	$\frac{23382}{6485}$	……

Jak widzimy, peryjod ilorazów jest 1, 1, 1, 1, 6, a zatém liczba nieparzysta, dlatego przybliżona wartość $\frac{18}{5}$ stojąca pod $2a=6$ w pierwszym peryjodzie, przeto rozwiąże (jest mniejszą niż $\sqrt{13}$,) ~~to~~ zrównanie $x^2-13y^2=-1$. Jest też rzeczywiście $18^2-13.5^2=-1$

Druga wartość przybliżona $\frac{649}{180}$ stojąca pod 6 stoi na miejscu parzystém, na dziesiątém i dlatego jest większą niż $\sqrt{13}$, a z tego powodu rozwiąże zrównanie $x^2-13y^2=+1$. Rzeczywiście liczby $x=649$, $y=180$ są temi samemi jakie sposobem Pella znaleźliśmy i jest $\overline{649}^2-13.\overline{180}^2=+1$.

Następująca wartość w trzecim peryjodzie $\frac{23382}{6485}<\sqrt{13}$ bo stoi na miejscu nieparzystém, 15stém, rozwiąże też zrównanie $x^2-13y^2=-1$ t. j. będzie $\overline{23382}^2-13.\overline{6485}^2=-1$ i t. d. naprzemian

Porównawszy ten sposób rozwiązania ze sposobem Pella każdy przyzna że jest łatwiejszym a nawet krótszym. Co się zaś tyczy jego wytworności i precyzji niemoże tamten wytrzymać z nim żadnego porównania.

Porachujmy jeszcze jeden przykład w całej obszerności, szukając najmniejszych liczb całkowitych rozwiązujących równanie $x^2-61y^2=+1$.

Szukając ilorazów czyli mianowników ułomka ciągłego, a jeszcze raz przypomnimy według wzorów $Q_{n+1}=a_nP_n-Q_n$ i $P_{n+1}=\frac{A-Q_{n+1}^2}{P_n}$, bo jest najłatwiej i najkrócej, będzie:

$$\sqrt{61}=\frac{\sqrt{61}+0}{1}=7+$$
$$\frac{\sqrt{61}+7}{12}=1+$$
$$\frac{\sqrt{61}+5}{3}=4+$$
$$\frac{\sqrt{61}+7}{4}=3+$$
$$\frac{\sqrt{61}+5}{9}=1+$$
$$\frac{\sqrt{61}+4}{5}=2+$$
$$\frac{\sqrt{61}+6}{5}=2+$$
$$\frac{\sqrt{61}+4}{9}=1+$$
$$\frac{\sqrt{61}+5}{4}=3+$$
$$\frac{\sqrt{61}+7}{3}=4+$$
$$\frac{\sqrt{61}+5}{12}=1+$$
$$\frac{\sqrt{61}+7}{1}=14+$$

więc $\sqrt{61}=7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14}}}}}}}}}}}$ i t. d.

Zwijając ten ułomek i przestając tylko na dwóch peryjodach, ponieważ liczba ilorazów jest nieparzystą, więc tak równanie $x^2-61y^2=-1$, jako też $x^2-61y^2=+1$ będziemy gotowi być rozwiązanem. Przybliżone wartości znajdziemy jak następuje:

$$\overset{7}{\frac{1}{0}},\ \overset{1}{\frac{7}{1}},\ \overset{4}{\frac{8}{1}},\ \overset{3}{\frac{39}{5}},\ \overset{1}{\frac{125}{16}},\ \overset{2}{\frac{164}{21}},\ \overset{2}{\frac{453}{58}},\ \overset{1}{\frac{1070}{137}},\ \overset{3}{\frac{1523}{195}},\ \overset{4}{\frac{5639}{722}},\ \overset{1}{\frac{24079}{3083}},\ \overset{14}{\frac{29718}{3805}},\ \overset{1}{\frac{440131}{56353}},$$

$$\overset{4}{\frac{469849}{60158}},\ \overset{3}{\frac{2319527}{296985}},\ \overset{1}{\frac{7428430}{951113}},\ \overset{2}{\frac{9717957}{1248098}},\ \overset{2}{\frac{26924344}{3447309}},\ \overset{1}{\frac{63596645}{8142716}},$$

$$\overset{3}{\frac{90520989}{11590025}},\ \overset{4}{\frac{335169612}{42912791}},\ \overset{1}{\frac{1431159437}{183241189}},\ \overset{14}{\frac{1766319049}{226153980}},\ \text{i t. d.}$$

Otóż przybliżona wartość $\frac{29718}{3805}$ pierwszego peryjodu, rozwiąże równanie $x^2-61y^2=-1$, jest też rzeczywiście $\overline{29718}^2-61.\overline{3805}^2=-1$. Druga wartość $\frac{1766319049}{226153980}$ w drugim peryjodzie, rozwiąże równanie $x^2-61y^2=+1$. Jakoż $\overline{1766319649}^2-61.\overline{226153980}^2=+1$, i liczby $x=1766319049$ i $y=226153980$ są najmniejszemi rozwiązującemi to ostatnie równanie. Następnych peryjodów przybliżone wartości rozwiążą naprzemian pierwsze i drugie równanie, mianowicie nieparzystych pierwsze, parzystych zaś peryjodów drugie równanie.

Dla liczby $A=43$, znajdziemy ilorazy 6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12 a wartości przybliżone $\overset{6}{\frac{1}{0}},\ \overset{1}{\frac{5}{1}},\ \overset{1}{\frac{7}{1}},\ \overset{3}{\frac{13}{2}},\ \overset{1}{\frac{46}{7}},\ \overset{5}{\frac{59}{9}},\ \overset{1}{\frac{341}{52}},\ \overset{3}{\frac{400}{61}},\ \overset{1}{\frac{1541}{235}},\ \overset{1}{\frac{1941}{296}},\ \overset{12}{\frac{3482}{531}}$ i t. d. przeto $x=3482$, $y=531$ i dla tej liczby 43 nie masz rozwiązania równania $x^2-43y^2=-1$ bo liczba przybliżonych wartości peryjodu jest parzystą i dlatego w każdym peryjodzie wartość przybliżona stojąca przed ilorazem 12, będzie na miejscu parzystem.

Dla $A=28$, znajdziemy $x=127$, $y=24$ a $x^2-28y^2=1$
$A=29$ – – – – – – $x=70$, $y=13$ a $x^2-29y^2=-1$ zaś $x=9801$ $y=1820$ dla
$A=44$ – – – – – – $x=199$, $y=30$ … $x^2-44y^2=1$
$A=45$ – – – – – – $x=161$, $y=24$ … $x^2-45y^2=1$
$A=67$ – – – – – – $x=48842$, $y=5967$ … $x^2-67y^2=1$
$A=53$ – – – – – – $x=182$, $y=25$ … $x^2-53y^2=-1$ … $x=66249$, $y=9100$ dla

i t. d.

§ 25. Znalazłszy poprzednio wyłożonym sposobem jedno rozwiązanie zrównania $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, łatwo znaleść można wiele innych. I tak, jeżeli liczba przybliżonych wartości peryjodu jest parzysta, wtedy, jak wiemy, tylko zrównanie $x^2 - Ay^2 = +1$ może być rozwiązanem w liczbach całkowitych. Niechże pierwszą zaraz zrównanie rozwiązującą wartością będzie $\frac{p}{q}$, jest przeto $p^2 - Aq^2 = 1$; niech też inném którémkolwiek rozwiązaniem będzie przybliżona wartość $\frac{P}{Q}$, dla tego będzie także $P^2 - AQ^2 = 1$ zatém

$$(p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = p^2P^2 + A^2q^2Q^2 - Ap^2Q^2 - Aq^2P^2 = 1$$

W pierwszej stronie zrównania dodawszy i odjąwszy $2ApPqQ$, znajdziemy

$$(pP + AqQ)^2 - A(pQ + qP)^2 = 1$$

a to zrównanie jest postaci $x^2 - Ay^2 = 1$, jeżeli położymy $x = pP + AqQ$, $y = pQ + qP$.

Oznaczywszy przeto wartości przybliżone następujących po sobie peryjodów rozwiązujące też zrównanie przez $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''}$ i t. d. Stosownie do poprzednich wartości x i y, położyć można

$$\begin{aligned} p &= p & q &= q \\ p' &= p^2 + Aq^2 & q' &= 2pq \\ p'' &= pp' + Aqq' & q'' &= pq' + p'q \\ p''' &= pp'' + Aqq'' & q''' &= pq'' + p''q \\ p'''' &= pp''' + Aqq''' & q'''' &= pq''' + p'''q \end{aligned}$$

i t. d.

Aby zaś z jednego najprostszego rozwiązania mieć ogólne wyrażenia wszystkich innych rozwiązań, uważmy że $x^2 - Ay^2 = (x + y\sqrt{A})(x - y\sqrt{A}) = 1$, wyżej zaś znaleźliśmy $x = pP + AqQ$, $y = pQ + qP$, położywszy te ostatnie wartości znajdziemy $x \pm y\sqrt{A} = pP \pm qP\sqrt{A} \pm pQ\sqrt{A} + AqQ = (p \pm q\sqrt{A})(P \pm Q\sqrt{A})$, a dla tego położyć też można

$$\begin{aligned} p \pm q\sqrt{A} &= p \pm q\sqrt{A} \\ p' \pm q'\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^2 \\ p'' \pm q''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^3 \\ p''' \pm q'''\sqrt{A} &= (p \pm q\sqrt{A})^4 \end{aligned}$$

i t. d.

w ogólności
$$x + y\sqrt{A} = (p + q\sqrt{A})^m$$
$$x - y\sqrt{A} = (p - q\sqrt{A})^m \quad \text{bo } x \text{ i } y \text{ są wymiernemi}$$

~~bo~~ a
$$x^2 - Ay^2 = (p^2 - Aq^2)^m = 1^m = 1$$

co dowodzi że jakikolwiek będzie wykładnik m, byle tylko całkowity i dodatny, wartości na x i y rozwiążą zrównanie $x^2 - Ay^2 = 1$.

Jeżeli chcemy mieć wartości na x i y każdą osobno, tedy z dwóch powyższych zrównań wypada

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^m + (p - q\sqrt{A})^m}{2}$$
$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^m - (p - q\sqrt{A})^m}{2}$$

Rozwinąwszy potęgą m tych dwumianów, znajdziemy

$$x = p^m + \frac{m(m-1)}{1.2}Ap^{m-2}q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}A^2p^{m-4}q^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}A^3p^{m-6}q^6 + \ldots$$
$$y = mp^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}Ap^{m-3}q^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}A^2p^{m-5}q^5 + \ldots$$

bo w x zniosą się wyrazy niewymierne, zaś w y obie strony będą mieć wspólny czynnik $\sqrt{A}$, przez który się podzieli. Że te wartości są całkowite, widzimy to na pierwszy rzut oka gdyż liczby m, A, p, q są całkowitemi.

W przypadku że $p^2 - Aq^2 = -1$, można rozwiązać jak widzieliśmy także zrównanie $x^2 - Ay^2 = -1$ jako też $x^2 - Ay^2 = +1$. Ogólne wartości na x i y będą

dla drugiego
$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k} + (p - q\sqrt{A})^{2k}}{2}$$
$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k} - (p - q\sqrt{A})^{2k}}{2} \quad \text{kładzie } m = 2k$$

dla pierwszego
$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k+1} + (p - q\sqrt{A})^{2k+1}}{2}$$
$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^{2k+1} - (p - q\sqrt{A})^{2k+1}}{2} \quad \text{kładzie } m = 2k+1$$

t. j. w tym przypadku parzyste potęgi dwumianów $p+q\sqrt{A}$ i $p-q\sqrt{A}$ rozwiążą równanie $x^2-Ay^2=+1$, a nieparzyste, $x^2-Ay^2=-1$, bo jeżeli

$$x+y\sqrt{A}=(p+q\sqrt{A})^{2k} \quad \text{jeżeli zaś} \quad x+y\sqrt{A}=(p+q\sqrt{A})^{2k+1}$$
$$x-y\sqrt{A}=(p-q\sqrt{A})^{2k} \qquad\qquad x-y\sqrt{A}=(p-q\sqrt{A})^{2k+1}$$
$$\text{tedy}\quad x^2-Ay^2=(-1)^{2k}=1 \qquad \text{będzie}\quad x^2-Ay^2=(-1)^{2k+1}=-1$$

Tak np. dla równania $x^2-29y^2=\pm1$ znaleźliśmy $x=p=70$ a $y=q=13$ tak że $p^2-Aq^2=70^2-29.13^2=-1$, więc wszystkie wartości otrzymane

z $x=\frac{(70+13\sqrt{29})^{2k}+(70-13\sqrt{29})^{2k}}{2}$ i $y=\frac{(70+13\sqrt{29})^{2k}-(70-13\sqrt{29})^{2k}}{2}$

rozwiążą równanie $x^2-29y^2=1$, wartości zaś otrzymane

z $x=\frac{(70+13\sqrt{29})^{2k+1}+(70-13\sqrt{29})^{2k+1}}{2}$ i $y=\frac{(70+13\sqrt{29})^{2k+1}-(70-13\sqrt{29})^{2k+1}}{2}$

rozwiążą równanie $x^2-29y^2=-1$.

Najmniejsze liczby rozwiązujące równanie $x^2-29y^2=1$ są jak widzieliśmy $x=9801$, $y=1820$ i rzeczywiście $\overline{9801}^2-29.\overline{1820}^2=1$.

Zresztą najmniejsze liczby rozwiązujące równanie $x^2-Ay^2=\pm1$ są nie tylko bardzo znaczne, ale nawet bardzo wielkie. Tak np. chcąc rozwiązać równanie $x^2-211y^2=1$, tedy rozwijając $\sqrt{211}$ na ułamek ciągły, znajdziemy peryjod mianowników złożony z 26 wyrazów następujących

14) 1, 1, 9, 5, 1, 2, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 13, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 5, 9, 1, 1, 28, wartość zaś przybliżona 26ta $=\frac{278354373650}{19162705353}$, przeto najmniejszemi, to równanie rozwiązującemi liczbami są: $x=278354373650$ a $y=19162705353$.

Dla równania $x^2-991y^2=1$, znaleźlibyśmy

$x=37951\ 64009\ 06811\ 93063\ 80148\ 96080$

$y=1205\ 57357\ 90331\ 35944\ 74425\ \not{2}8767$ 3

Ważną więc jest rzeczą mieć pewny i niemylny sposób wyszukiwania tych najmniejszych liczb, bo próbując bezskutecznie liczby niewielkie, fałszywie byśmy wnioskowali iż podane równanie nie może być rozwiązanem w liczbach całkowitych. Poprzednio wyłożone prawidła przekonywają nas, że sposobem tym pewnym są ułamki ciągłe przy pomocy których przychodzimy do znalezienia liczb rozwiązujących równanie $x^2-Ay^2=\pm1$.

Już wspomniałem, że pierwszy Fermat, matematyk francuzki podał matematykom angielskim do rozwiązania równanie $x^2-Ay^2=1$ w liczbach całkowitych, a lubo już Brounker rozwiązał rzeczywiście, przecież ani pierwszy ani drugi nie podali ogólnego na ten cel sposobu, ani też dowiedli że to równanie zawsze rozwiązanem być może w liczbach całkowitych. Pierwszy dopiero Lagranż podał taki dowód w „Mélanges de Turin” tom IV, a potem w „Memoires de Berlin 1767”. Jemu też zawdzięczamy ten olbrzymi postęp w analizie nieoznaczonej; nie dość bowiem że tyle razy wspomniane tu równanie samo z siebie jest ciekawém i do myślenia pobudza, jest ono jeszcze koniecznem w rozwiązywaniu nieoznaczonych zadań prowadzących do równania stopnia drugiego z dwiema nieznanemi w liczbach całkowitych. Widzieliśmy bowiem że znając jedno rozwiązanie, przy jego pomocy znaleźć możemy nieskończoną liczbę innych. Dlatego to niektórzy w tym przedmiocie pracujący matematycy jak Degen Duńczyk i Lezandr Francuz wyrachowali nawet tablice dające najmniejsze liczby rozwiązujące równanie $x^2-Ay^2=\pm1$. Pierwszy wydał je pod tytułem „Canon Pellianus, sive tabula simplicissimam aequationis celeberrimae $y^2=ax^2\pm1$ solutionem pro singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000 in numeris rationalibus iisdemque integris exhibens. Auctore C. F. Degen Hafniae 1817”. Drugi w sławnem swém dziele „Théorie des Nombres” przydał na końcu tablicę X zawierającą najmniejsze rozwiązania rzeczonego równania poczynając od A=2, aż do A=1003 dla wszystkich środkujących liczb niebędących dokładnemi kwadratami.

18

1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 1, 20, 6, 4, 31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1,

31, 2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62

$\sqrt{991}$ rozwinięty na ułamek ciągły daje ilorazy powyższe gdzie 31 jest środkowym
a w całym prawie jest ilorazów 60

§ 26. Rozwiązawszy w całej ogólności równanie $x^2-Ay^2=\pm 1$ w liczbach całkowitych, w naturalnym porządku wypada teraz rozwiązać równanie $x^2-Ay^2=\pm P$ także w liczbach całkowitych. Weźmy tu przypadek że $P<\sqrt{A}$.

Skoro dowiedziemy, że ułamek $\frac{p}{q}$ różniący się od pewnej ilości x o $\pm\frac{\delta}{q^2}$, gdzie $\delta<1$, jest jedną z wartości przybliżonych ułamka ciągłego na który ilość x rozwiniona została, łatwo przyjdziemy do rozwiązania założonego równania.

W tym celu przypuśćmy że ułamek $\frac{p}{q}$ rozwiniony na ciągły daje ilorazy $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \lambda, \mu$ i przy ich pomocy przybliżone wartości $\frac{1}{0}, \frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha\beta+1}{\beta} \ldots\ldots \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$

Jeśli ułamek $\frac{p}{q}$ ma być jedną z wartości przybliżonych do x, tedy rozwijając x na ułamek ciągły, powinniśmy otrzymać też same ilorazy $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ i dalsze po μ następujące, które możemy oznaczyć przez $\mu', \mu'', \mu''', \ldots$

Oznaczmy przez y iloraz zupełny, tedy będzie jak wiemy $x=\frac{py+m}{qy+n}$, zatem

$$x-\frac{p}{q}=\frac{q(py+m)-p(qy+n)}{q(qy+n)}=\frac{mq-np}{q(qy+n)}=\frac{\pm 1}{q(qy+n)}$$

Ten ułamek według warunku być powinien $=\frac{\pm\delta}{q^2}$ czyli $\frac{\pm 1}{q(qy+n)}=\frac{\pm\delta}{q^2}$; chodzi tylko o to, żeby znaki tych dwóch ilości były w każdym razie też same, co wychodzi na to, żeby $mq-np$ i $\pm\delta$ miały też same znaki, którego warunku zawsze dopełnić można, bo ilorazy $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ otrzymuje się zwyczajnym sposobem i ostatni μ jest zawsze większym niż 1 z powodu że gdyby było to $\mu=1$, ułamek ciągły zamiast kończyć się na dwa wyrazy $\frac{1}{\lambda+\frac{1}{\mu}}$, kończyłby się tylko na jeden $\frac{1}{\lambda+1}$. Kiedy $\mu>1$, zatem gdybyśmy uważali za potrzebne, można skończyć ułamek ciągły na jednym wyrazie lub też na dwóch, rozkładając μ na $\mu-1$ i 1. Tak powyższy ułamek może być skończonym tak: $\ldots\ldots \lambda \quad \mu \quad \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ lub też tak: $\ldots \lambda, \mu-1, 1$; $\frac{m}{n}, \frac{p-m}{q-n}, \frac{p}{q}$

Oznaczmy teraz, bądź w pierwszym bądź drugim razie przybliżoną wartość poprzedzającą wartości $\frac{p}{q}$ przez $\frac{p'}{q'}$, tedy można wziąć $p'=m$, $q'=n$, albo też $p'=p-m$, $q'=q-n$; znak atoli ilości $pq'-p'q$ w dwóch tych razach jest różny, skąd wniesiemy, że tejże ilości można nadać znak dowolnie + lub −.

Na tej zasadzie mamy bez żadnej wątpliwości $\frac{1}{q(qy+q')}=\frac{\delta}{q^2}$ skąd $\delta=\frac{q}{qy+q'}$. Żeby y było ilorazem zupełnym, być koniecznie musi dodatnem i większym od 1, a dlatego $\delta<\frac{q}{q+q'}$. Nawzajem, jeśli ten ostatni warunek jest widocznym lub dowiedzionym, iloraz y będzie dodatnym i większym niż 1 a ułamek $\frac{p}{q}$ będzie jedną z wartości przybliżonych do x, o który też warunek nam w założeniu chodziło.

Ponieważ z natury wartości przybliżonych jest $q'<q$, więc warunku $\delta<\frac{q}{q+q'}$ w każdym razie dopełnimy, skoro będzie $\delta<\frac{1}{2}$.

27. Niech że teraz $p^2-Aq^2=\pm P$ będzie równaniem nieoznaczonem między niewiadomemi p i q, w którem $P<\sqrt{A}$, powiadam że w tym razie $\frac{p}{q}$ będzie jedną z przybliżonych wartości do $\sqrt{A}$. Z założonego równania wypada $p-q\sqrt{A}=\pm\frac{P}{p+q\sqrt{A}}$. Wystawiwszy $\frac{p}{q}-\sqrt{A}$ przez $\pm\frac{\delta}{q^2}$, będzie $\frac{\pm\delta}{q^2}=\frac{\pm P}{q(p+q\sqrt{A})}$, skąd $\delta=\frac{Pq}{p+q\sqrt{A}}$.

Niech $\frac{p'}{q'}$ będzie przybliżoną wartością poprzedzającą wartość $\frac{p}{q}$ ale tak wyznaczoną, żeby znaki δ i P były też same, pozostanie nam tylko na udowodnienie twierdzenia dowieść, że $\frac{Pq}{p+q\sqrt{A}}<\frac{q}{q+q'}$ czyli $P(q+q')<p+q\sqrt{A}$.

Ponieważ położyliśmy $\frac{p}{q}-\sqrt{A}=\frac{\pm\delta}{q^2}$ skąd $p=q\sqrt{A}\pm\frac{\delta}{q}$, położywszy więc tę wartość w dowieść się mającej nierówności za p, będzie $P(q+q')<2q\sqrt{A}\pm\frac{\delta}{q}$ czyli

czyli $P(q+q') - 2q\sqrt{A} < \pm\frac{\delta}{q}$, albo $P(q+q') - 2q\sqrt{A} - q'\sqrt{A} + q'\sqrt{A} < \pm\frac{\delta}{q}$, albo $P(q+q') - (q+q')\sqrt{A} - (q-q')\sqrt{A} < \pm\frac{\delta}{q}$, albo, $(P-\sqrt{A})(q+q') - (q-q')\sqrt{A} < \pm\frac{\delta}{q}$, lub nareszcie $(\sqrt{A}-P)(q+q') + (q-q')\sqrt{A} \pm \frac{\delta}{q} > 0$. Nierówność ta jest oczywistą, bo $\sqrt{A} > P$, $q > q'$ a wyraz $(q-q')\sqrt{A}$ równający się przynajmniej ilości $\sqrt{A}$, już sam jeden przewyższa ilość $\frac{\delta}{q}$ która jest mniejszą od 1. Ułamek przeto $\frac{P}{q}$ znajdować się koniecznie będzie między przybliżonemi wartościami do $\sqrt{A}$. Dosyć więc będzie $\sqrt{A}$ rozwinąć na ułamek ciągły i obrachować jego wartości przybliżone aby otrzymać wszystkie rozwiązania zrównania $x^2 - Ay^2 = \pm P$ w liczbach całkowitych, ponieważ jeszcze tylko że być powinno $P < \sqrt{A}$.

Rozwijając $\sqrt{A}$ na ułamek ciągły, szukamy jak wiadomo zupełnych ilorazów pod postacią jak widzieliśmy $\frac{\sqrt{A}+Q}{P}$ z których otrzymujemy mianowniki ułamka ciągłego; jeżeli więc który z tych ilorazów ma mianownik np. $P_{n+1} = P$, wtedy otrzymamy z przybliżonej wartości temuż ilorazowi odpowiadającej, jedno rozwiązanie zrównania $x^2-Ay^2=\pm P$. Bo jeżeli przybliżona wartość $\frac{p}{q}$ odpowiadająca mianownikowi $P_{n+1}=P$ będzie porządku parzystego, rachując zawsze za pierwszą $\frac{a}{1}$, wtedy będzie zawsze $\frac{p}{q} > \sqrt{A}$ i rozwiąże zrównanie $x^2-Ay^2=+P$, porządku zaś nieparzystego, zrównanie $x^2-Ay^2=-P$, gdyż w tym razie będzie $\frac{p}{q}<\sqrt{A}$.

Zdarzyć się może że liczba P znajdzie się kilka razy w tymże samym peryjodzie, a w każdym razie, z powodu symetryczności peryjodu, znajdzie się przynajmniej dwa razy, wyjąwszy gdyby P było ilorazem środkowym; w takim razie, otrzymamy tyleż rozwiązań zrównania pierwszego lub drugiego, co też i w innych peryjodach nastąpi.

§28. Ponieważ $\mp P_{n+1} = p_n^2 - Aq_n^2$, więc dla rozwiązania zrównania $x^2-Ay^2=\pm P$, dosyć będzie porachować $P_1, P_2, P_3 \ldots$ w całym peryjodzie, a jeżeli między temi mianownikami znajduje się P raz lub więcej razy, wtedy pewnymi jesteśmy że podane lub złożone zrównanie będzie mogło być rozwiązanem w liczbach całkowitych, a mianowicie, wartość przybliżona $\frac{p_n}{q_n}$ odpowiadająca mianownikowi $P_{n+1}=P$, będzie jednem rozwiązaniem zrównania $x^2-Ay^2=+P$, jeżeli $\frac{p_n}{q_n} > \sqrt{A}$, zaś zrównania $x^2-Ay^2=-P$, jeżeli $\frac{p_n}{q_n}<\sqrt{A}$. W przeciwnym razie rozwiązanie jest niepodobnem.

Jeżeli w pierwszym peryjodzie znajduje się mianownik P kilka razy, a następnie dojdziemy tyleż rozwiązań rzeczonego zrównania, można z tych pierwszych i na ich podstawie, otrzymać nieskończoną liczbę innych rozwiązań. Niech bowiem ~~[illegible]~~ ~~bowiem~~ $\frac{p}{q}$ będzie wartością rozwiązującą zrównanie $p^2-Aq^2=P$, niech też t i u będą dowolnemi jakiemikolwiek liczbami ~~[illegible]~~, rozwiązującemi zrównanie $t^2-Au^2=1$, tedy przez mnożenie otrzymamy $(p^2-Aq^2)(t^2-Au^2)=P$, a dodawszy i odjąwszy od pierwszej strony $2Apqtu$, znajdziemy

$$(pt\pm Aqu)^2 - A(pu\pm qt)^2 = P$$

które zrównanie jest ~~postaci~~ $x^2-Ay^2=P$ t.j. jest zrównaniem danem, jeżeli położymy

$$x = pt\pm Aqu, \quad y = pu \pm qt \quad (*)$$

i te wartości x i y rozwiążą zrównanie dane.

Co do nieoznaczonych t i u, już wyżej widzieliśmy, że jeżeli m i n są najmniejszemi zrównanie $m^2-An^2=1$ rozwiązującemi liczbami, tedy, oznaczywszy przez k jakąkolwiek liczbę całkowitą i dodatną, mamy zawsze

$$(m+n\sqrt{A})^k = t+u\sqrt{A}$$

(*) Zapewne bez zwrócenia z mej strony uwagi każdy dostrzeże tożsamość tych wzorów z wzorami również ogólnemi w §§ ~~[illegible]~~ 15 i 16 otrzymanemi.

Wychodząc przeto z pierwszych najprostszych rozwiązań pierwszego peryjodu, otrzymamy tyle ogólnych wzorów dających nieskończoną liczbę rozwiązań zadanego zrównania, ile było pierwotnych.

Wartości powyższe na x i y, rozwiązują dane zrównanie bądź to że P jest dodatném, bądź też odjemném, bo one jeden tylko warunek dopełnić muszą a ten jest, iżby tak w szczególném $p^2 - Aq^2 = P$ (jako) i ogólném zrównaniu $x^2 - Ay^2 = P$, znaki liczby P były też same, t. j. oba te zrównania przypuszczają że $m^2 - An^2 = +1$, gdzie m i n mają znaczenie jak poprzednio, mianowicie są najmniejszemi, zrównanie $m^2 - An^2 = +1$ rozwiązującemi liczbami. Jeżeli zaś jest $m^2 - An^2 = -1$, w takim razie wartości $x = pt \pm Aqu$ i $y = pu \pm qt$, rozwiązują tak $x^2 - Ay^2 = +P$ jako też $x^2 - Ay^2 = -P$, mianowicie pierwsze, kładąc $(m + n\sqrt{A})^{2k} = t + u\sqrt{A}$, drugie zaś kładąc $(m + n\sqrt{A})^{2k+1} = t + u\sqrt{A}$.

§29. Z tego co się dotąd o rozwiązaniu zrównania $x^2 - Ay^2 = \pm P$ powiedziało, jasno widzimy jak ważne są tablice dające najmniejsze liczby m i n rozwiązujące zrównanie $m^2 - An^2 = \pm 1$. Znając bowiem też liczby, zamiast szukać ilorazów takich jak np. $\frac{\sqrt{A} + Q_1}{P_1}$, $\frac{\sqrt{A} + Q_2}{P_2}$, $\frac{\sqrt{A} + Q_3}{P_3}$ i t. d. dosyć jest ułamek $\frac{m}{n}$ rozwinąć na ułamek ciągły. Żeby zaś znaleść mianownik $P_{n+1} = P$ niepotrzebujemy także uciekać się do rzeczonych ilorazów bo każdy łatwo znajdziemy dzieląc tylko $2a$ przez P, gdzie, jak wiemy, a wyraża największą ~~cał~~ całkowitą zawartą w $\sqrt{A}$. Aby się o tej prawdzie przekonać, dosyć wziąść z §14, 20. ~~[illegible]~~ zrównanie $q_n Q_{n+1} + q_{n-1} P_{n+1} = p_n$ z którego $Q_{n+1} = \frac{p_n - q_{n-1} P_{n+1}}{q_n}$ czyli $Q_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n} P$; i przeto $\frac{\sqrt{A} + Q_{n+1}}{P} = \frac{\sqrt{A} + \frac{p_n}{q_n} - \frac{q_{n-1} P}{q_n}}{P} = \frac{\sqrt{A} + \frac{p_n}{q_n}}{P} - \frac{q_{n-1}}{q_n}$, z czego widzimy że całkowita liczba zawarta w $\frac{\sqrt{A} + Q_{n+1}}{P}$, bardzo bliską jest całkowitej zawartej w $\frac{\sqrt{A} + \frac{p_n}{q_n}}{P}$ t. j. bardzo jest bliską ilorazu $\frac{2a}{P}$. Tym sposobem niepotrzebném jest szukać mianowników P_1, P_2, P_3 i t. d. ale podzieliwszy podwójną całkowitą zawartą w $\sqrt{A}$ przez liczbę P daną w zrównaniu, otrzyma się mianownik ułamku ciągłego odpowiadającego ilorazowi $\frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}$, a stojąca pod znalezionym mianownikiem przybliżona wartość da nam rozwiązanie danego zrównania. Lecz, ponieważ dwom różnym mianownikom P_n, odpowiadają często też same ilorazy a_n, zatém pewniej jest (szczególniej gdy liczba A jest niewielka) poszukać wyrazem $\frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}$ całego peryjodu i zobaczyć czyli pomiędzy mianownikami P_n znajduje się i ile razy liczba P dana w zrównaniu, a wtedy każda przybliżona wartość $\frac{p}{q}$ ~~odp~~ stojąca pod ilorazem a_n odpowiadającym $P_n = P$, rozwiąże zrównanie $x^2 - Ay^2 = +P$ lub $x^2 - Ay^2 = -P$ według tego jak wartość przybliżona $\frac{p}{q}$ jest parzystą, t. j. drugą, czwartą, szóstą i t. d. lub nieparzystą, pierwszą, trzecią, piątą i t. d. Niedość na tém, ale każda przybliżona wartość stojąca pod mianownikiem a_n który jest ilorazem z $\frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}$, skoro będzie $P = P_n$, chociażby było $P > \sqrt{A}$ lecz $< 2a$, rozwiąże zrównanie.

Ale weźmy nareszcie przykłady które nam lepiej całe wyjaśnią postępowanie. Niech danem będzie zrównanie do rozwiązania w liczbach całkowitych $x^2 - 71y^2 = 7$. Ze wspomnianych wyżej tablicach znaleźlibyśmy dla liczby 71, $m = 3480$, $n = 413$; ułamek $\frac{m}{n}$ rozwijając na ciągły, znajdziemy ilorazy $8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2$
a wartości przybliżone $\frac{1}{0}, \frac{8}{1}, \frac{17}{2}, \frac{42}{5}, \frac{59}{7}, \frac{455}{54}, \frac{514}{61}, \frac{1483}{176}$
Ponieważ $\frac{2a}{P} = \frac{2.8}{7} = 2+$ więc według powyższego przybliżona wartość $\frac{8}{1}$ stojąca pod 2 i jako pierwsza, rozwiąże zrównanie $x^2 - 71y^2 = -7$, jest też $8^2 - 71.1^2 = -7$. Druga wartość $\frac{17}{2}$ stojąca także pod 2 a na miejscu parzystém, rozwiązać powinna zrównanie $x^2 - 71y^2 = +7$, gdy tym czasem $17^2 - 71.2^2 = +5$. Szósta przybliżona wartość a zatém parzysta $\frac{514}{61}$, rozwiązać także powinna zrównanie $x^2 - 71y^2 = +7$, a tym czasem $514^2 - 71.61^2 = +5$. Dopiero znowu następna siódma

a zatém nieparzysta przybliżona wartość $\frac{1483}{176}$ rozwiąże równanie $x^2-71y^2=-7$; jest téż rzeczywiście $\overline{1483}^2-71.\overline{176}^2=-7$. Niezgodzie to pochodzi.

Chcęc się o tém przekonać, szukajmy ilorazów czyli wyrażeń $\frac{\sqrt{A}+2_n}{P_n}$ dla liczby 71, a znajdziemy je jak następuje, $\frac{\sqrt{71}+0}{1}=8+$, $\frac{\sqrt{71}+8}{7}=2+$, $\frac{\sqrt{71}+6}{5}=2+$, $\frac{\sqrt{71}+4}{11}=1+$, $\frac{\sqrt{71}+7}{2}=7+$, $\frac{\sqrt{71}+7}{11}=1+$, $\frac{\sqrt{71}+4}{5}=2+$, $\frac{\sqrt{71}+6}{7}=2+$, $\frac{\sqrt{71}+8}{1}=16+$.

Otóż naocznie widzimy że tylko dwa razy jest mianownik $P_n=7=P$ i że téż tylko wartości które stoją pod ilorazem 2 wypadającym z $\frac{\sqrt{71}+8}{7}$ i $\frac{\sqrt{71}+6}{7}$, rozwiązują podane równanie bez zeznakiem —, bo obie stoją na miejscach nieparzystych. Dwa inne ilorazy, mianowicie drugi i siódmy, należące do mianowników 5, stoją na parzystych miejscach, i dlatego nie dane, ale równanie $x^2-71y^2=+5$ rozwiązują. Pomiędzy mianownikami P_n, znajdujemy także dwa $=11$, a lubo $11>\sqrt{71}$, wszelako przybliżone wartości, odpowiadające tym mianownikom czyli ilorazom 1, rozwiążą równanie $x^2-71y^2=-11$ z powodu że obie stoją na nieparzystych miejscach. Rzeczywiście $\overline{42}^2-71.\overline{5}^2=-11$ jako téż $\overline{455}^2-71.\overline{54}^2=-11$. Z tego się pokazuje że warunek rozwiązalności równania $x^2-Ay^2=\pm P$ w liczbach całkowitych wyżej założony $P<\sqrt{A}$, przestępie można i zamiast niego wziąść warunek $P<2a$.

F Gdybyśmy mieli równanie $x^2-71y^2=8$ tedy chociaż $8<\sqrt{71}$ oraz $\frac{2.8}{8}=2$ znajdujemy między ilorazami i to 4 razy którym odpowiadają wartości przybliżone $\frac{8}{1}$, na pierwszém, $\frac{17}{2}$ na drugiém, $\frac{514}{61}$ na trzecim a $\frac{1483}{176}$ na czwartém miejscu, wszelako żadna z tych wartości nie rozwiązuje powyższego równania bo pomiędzy mianownikami P_n nie znajdujemy 8.

F Za drugi przykład weźmy równanie $x^2-61y^2=\pm5$. Wyżej znaleźliśmy już rozwinięcie $\sqrt{61}$ na ułamek ciągły. Gdybyśmy tego nie mieli, poszukalibyśmy w tablicy najmniejszych liczb m i n odpowiadających liczbie 61, które, jak wiemy, znaleźlibyśmy $m=1766319049$, $n=226153980$ i potém ułamek $\frac{m}{n}$ rozwinęlibyśmy na ciągły i znaleźli ilorazy jak wyżej

ilorazy - - - - -		7	1	4	3	1	2	2	1	3	4	1
wartości przybliżone	$\frac{1}{0}$,	$\frac{7}{1}$,	$\frac{8}{1}$,	$\frac{39}{5}$,	$\frac{125}{16}$,	$\frac{164}{21}$,	$\frac{453}{58}$,	$\frac{1070}{137}$,	$\frac{1523}{195}$,	$\frac{5639}{722}$,	$\frac{24079}{3083}$,

Ponieważ tu $\frac{2a}{P}=\frac{2.7}{5}=2+$.., i przeto szukamy między ilorazami liczby 2 i znajdujemy takową dwa razy, przeto chociaż nie wiemy z pewnością że te ilorazy odpowiadają mianownikowi $P_n=5$, wszelako jest bardzo prawdopodobném że wartości przybliżone $\frac{164}{21}$ i $\frac{453}{58}$ stojące pod temi ilorazami rozwiążą założone równanie. A jeżeli to nastąpi, tedy pierwsza jako stojąca na miejscu nieparzystém bo piątém, rozwiąże równanie $x^2-61y^2=-5$, druga zaś, jako stojąca na miejscu szóstém a zatém parzystém, rozwiąże równanie $x^2-61y^2=+5$. Rzeczywiście $\overline{164}^2-61.\overline{21}^2=-5$ a $\overline{453}^2-61.\overline{58}^2=+5$. Mając przed oczyma wyrażenia ~~$\sqrt{61}$~~ $\frac{\sqrt{A}+2_n}{P_n}$, znajdujemy pomiędzy mianownikami P_n liczby 9 i 12 z których każda jest większą niż $\sqrt{61}$, wszelako ponieważ téż każda jest mniejszą niż $2a$, bo jak wiemy P_n nigdy nie może przekroczyć granicy $2a$, zatém i wartości przybliżone stojące pod ilorazami 1 i 1 należącemi do tych mianowników, mianowicie wartości $\frac{125}{16}$ i $\frac{1070}{137}$ rozwiążą równanie $x^2-61y^2=\pm9$ i to pierwsza równanie $x^2-61y^2=+9$ bo stoi na miejscu parzystém, czwartém, druga zaś równanie $x^2-61y^2=-9$ bo stoi na miejscu nieparzystém, bo siódmém. Jakoż $\overline{125}^2-61.\overline{16}^2=+9$ a $\overline{1070}^2-61.\overline{137}^2=-9$. Wartości $\frac{7}{1}$ i $\frac{24079}{3083}$ stojące także pod ilorazami 1, ale odpowiadającemi mianownikom 12, rozwiążą równanie pierwsza $x^2-61y^2=-12$ bo stoi na pierwszém a zatém nieparzystém miejscu, druga zaś równanie $x^2-61y^2=+12$ bo stoi na parzystém, dwunastém miejscu. Rzeczywiście $7^2-61.1^2=-12$ a $\overline{24079}^2-61.\overline{3083}^2=+12$.

§ 30. Jeżeli teraz chcemy znaleźć inne rozwiązania ~~np~~ równania $x^2-61y^2=5$ tedy dosyć wziąść, jak wyżej widzieliśmy $x=pt\pm Aqu$, $y=pu\pm qt$ gdzie $p=453$, $q=58$, $A=61$, zaś $t+u\sqrt{A}=t+u\sqrt{61}=(m+n\sqrt{61})^{2k}=(29718+3805\sqrt{61})^{2k}$ gdzie m i n są najmniejszemi równanie $m^2-61n^2=-1$ rozwiązującemi liczbami. Równanie przeto $x^2-61y^2=5$, rozwiążą wszystkie wartości otrzymane z $x=453t\pm3538u$, $y=453u\pm58t$, $t+u\sqrt{61}=(29718+3805\sqrt{61})^{2k}$ skoro za k położymy wszystkie liczby całkowite i dodatnie.

Ale zrównanie to rozwiążą též wartości otrzymane z wartości $p=164$ i $q=21$ rozwiązujących zrównanie $x^2-61y^2=-5$, to jest wartości

$$x=164t\pm1281u,\quad y=164u\pm21t,\ \text{kładąc } t+u\sqrt{61}=(29718+3805\sqrt{61})^{2k+1}$$

Jak dla zrównania $x^2-61y^2=5$, tak zupełnie znaleźlibyśmy inne rozwiązania dla zrównania $x^2-61y^2=-5$. Że dwie znalezione wartości $\frac{p}{q}$ dające dwie z różnemi znakami wartości dla P rozwiązują wspólnie toż samo zrównanie, przyczyną jest ta, że m i n są takiemi liczbami całkowitemi, iż czynią $m^2-An^2=-1$, a w takim bowiem razie, rozwiązanie zrównania $x^2-Ay^2=P$ daje także jedno rozwiązanie zrównania $x^2-Ay^2=-P$ i wzajemnie.

Przy tem wszystkiem pamiętać należy, iż gdyby liczba P miała w sobie jakikolwiek czynnik kwadratowy np. α^2, natenczas, lubo $P<\sqrt{A}$, ponieważ $P=\alpha^2P'$, oprócz znalezionych poprzednim sposobem rozwiązań, gdzie x i y zawsze uważaliśmy pierwszemi między sobą, mogą się znaleźć inne, w których by x i y miały wspólnego dzielnika α. Rzeczywiście bowiem uważając z jednej strony że zrównanie $x'^2-Ay'^2=P'$ może być rozwiązanem, to z drugiej jasną jest rzeczą że otrzymamy na rozwiązanie zrównania $x^2-Ay^2=P$ wartości $x=\alpha x'$, $y=\alpha y'$. A dlatego tyle być może nowych rozwiązań, ile jest sposobów dzielenia liczby P przez kwadrat. Tak np. wyżej przy zrównaniu $x^2-71y^2=8$, widzieliśmy że żadna z przybliżonych wartości nie rozwiązuje tego zrównania, atoli ponieważ $8=2.4=2.2^2$, zatem $\alpha=2$ i położywszy $P=\alpha^2P'=8=2^2.2$ z czego wypada $P'=2$, rozwiążemy, jeżeli być może, zrównanie $x'^2-71y'^2=2$. Ponieważ pomiędzy mianownikami P_n dla liczby 71 znajduje się jeden $\frac{\sqrt{71}+7}{2}$ który odpowiada środkowemu ilorazowi 7, a temu odpowiada przybliżona wartość $\frac{59}{7}$ i jest czwartą a zatem parzystą wartością, zatem rozwiąże zrównanie $x'^2-71y'^2=+2$ i rzeczywiście mamy $\overline{59}^2-71.7^2=2$, więc następnie $x=\alpha x'=2.59=118$ i $y=\alpha y'=2.7=14$, rozwiążą zrównanie założone $x^2-71y^2=8$. Jakoż $\overline{118}^2-71.\overline{14}^2=8$.

Za trzeci i ostatni przykład weźmy do rozwiązania w liczbach całkowitych zrównanie $x^2-103y^2=9$. Rozwijając $\sqrt{103}$ na ułamek ciągły, znajdziemy ilorazy 10, 6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20 a wartości przybliżone $\frac{10}{1}$, $\frac{61}{6}$, $\frac{71}{7}$, $\frac{203}{20}$, $\frac{274}{27}$, $\frac{477}{47}$, $\frac{4567}{450}$, $\frac{5044}{497}$, $\frac{9611}{947}$, $\frac{24266}{2391}$, $\frac{33877}{3338}$, $\frac{227528}{22419}$. Ponieważ $\frac{2a}{P}=\frac{2.10}{9}=2+\dots$ więc wartości przybliżone $\frac{71}{7}$ i $\frac{9611}{947}$ stojące pod ilorazami 2 powinny rozwiązać założone zrównanie, a tym czasem ilorazy 2 należą do mianowników $P=6$ a nie 9 i dlatego nie rozwiążą założonego, ale zrównanie $x^2-103y^2=6$. Wszelako pomiędzy mianownikami P_n są dwa, do których należą ilorazy 1 nie 2 i pod niemi stoją wartości przybliżone $\frac{203}{2}$ i $\frac{5044}{497}$, pierwsza na czwartem a druga na ósmem obiegunowo na miejscach parzystych, i te też rzeczywiście rozwiązują założone zrównanie tak że

$\overline{203}^2-103.\overline{20}^2=9$ i $\overline{5044}^2-103.\overline{497}^2=9$. Dlatego to powiedziałem iż jest pewniej poszukać ilorazów $\frac{\sqrt{A}+Q_n}{P_n}$, bo się zaraz widzi czyli między temi mianownikami znajduje się P, i który iloraz, a następnie wartość przybliżona, odpowiada temuż mianownikowi. Ale w naszem danem zrównaniu jest $9=3^2.1$, więc rozwiązawszy zrównanie $x'^2-103y'^2=+1$ mieć też będziemy rozwiązanie danego zrównania $x=3x'$, $y=3y'$. Jakoż zrównanie $x'^2-103y'^2=1$ rozwiązują liczby z powyższego rozwinięcia otrzymane $x'=227528$ i $y'=22419$ według tego co z poprzedniego rozwiązania zrównania $x^2-Ay^2=\pm1$ wiemy, założone przeto zrównanie rozwiązują też liczby $x=3.227528=682584$ i $y=3.22419=67257$.

§31. Dotąd nauczyliśmy się rozwiązać każde zrównanie postaci $x^2-Ay^2=\pm P$, jeżeli w ogólności może być rozwiązanem w liczbach całkowitych, pod warunkiem że $P<\sqrt{A}$, którą granicę jednak, jak widzieliśmy w przykładach, przekroczyć możemy aż do $P<2a$ gdzie a jest największą liczbą całkowitą zawartą w $\sqrt{A}$. Wszelako nie umiemy dotąd rozwiązać ogólnego zrównania drugiego stopnia z dwiema nieznanemi w liczbach całkowitych, ale tylko w wymiernych, co większa, nie umiemy nawet rozwiązać zrównania postaci $Ax^2+Bxy+Cy^2+D=0$ także w liczbach całkowitych. Otóż nie zapuszczając się w obszerną teoryję uważającą tu liczby albo raczej współczynniki wchodzące w pojedyncze, lub ogólne, lub też jeszcze innej postaci zrównania, jak np. $Mx^2-Ny^2=P$, pod różnemi postaciami liczb całkowitych, jako to $4n+1, 4n+2, 4n+3, 4n-1 \ldots 8n+1, 8n+2 \ldots 8n+7$ i inne, bo ciekawi znajdą to wszystko w przywiedzionem już dziele Legendra „Théorie des Nombres", poświęcę tu w krótkości co w tym względzie jest najważniejszego a w zastosowaniach wydanym się mogącego. (*)

Zaczynam przeto od zrównania $Ax^2+Bxy+Cy^2+D=0$.

Aby to zrównanie rozwiązać w liczbach całkowitych, weźmy przybrane zrównanie $ax^2-2mx=n$, z którego $x=\frac{m\pm\sqrt{an+m^2}}{a}$. Jeżeli dwa te pierwiastki są rzeczywistemi, każdy z nich można, jak wiadomo, rozwinąć na ułomek ciągły czyli peryjodyczny i symetryczny. Niechże więc $\frac{p'}{q'}$ i $\frac{p}{q}$ będą dwiema po sobie następującemi wartościami przybliżonemi tego ułomka. Oznaczywszy przez z iloraz zupełny stojący nad wartością $\frac{p}{q}$, tedy wiadomo że będzie $x=\frac{pz+p'}{qz+q'}$ skąd wypada $z=\frac{q'x-p'}{p-qx}$. Położywszy tu powyższą wartość x z przybranego zrównania otrzymaną, znajdziemy

$$z=\frac{q'm-p'a\pm q'\sqrt{an+m^2}}{pa-qm\mp q\sqrt{an+m^2}}$$

Przywiódłszy tu mianownika do wymierności i uprościwszy, otrzymamy

$$z=\frac{\pm(pq'-p'q)\sqrt{an+m^2}+(pq'+p'q)m-pp'a+qq'n}{ap^2-2mpq-nq^2}$$

a dzieląc jeszcze licznika i mianownika przez $pq'-p'q$, oraz kładąc $an+m^2=A$, będzie

$$z=\frac{\sqrt{A}+\frac{pq'+p'q}{pq'-p'q}m-\frac{pp'a+qq'n}{pq'-p'q}}{\frac{ap^2-2mpq-nq^2}{pq'-p'q}}$$

Wartość ta na z jest postaci zupełnego ilorazu $\frac{\sqrt{A}+Q_n}{P_n}$ lub też $\frac{\sqrt{A}+Q}{P}$, położywszy zatem

$$A=an+m^2$$

$$Q=\frac{(pq'+p'q)m-pp'a+qq'n}{pq'-p'q} \text{ czyli } (pq'-p'q)Q=(pq'+p'q)m-pp'a+qq'n$$

$$P=\frac{ap^2-2mpq-nq^2}{pq'-p'q} \quad \ldots\ldots \quad (pq'-p'q)P=ap^2-2mpq-nq^2,$$

z ostatniego z tych zrównań widzimy, że ponieważ $pq'-p'q=\pm1$, wartości p i q rozwiążą zrównanie $ap^2-2mpq-nq^2=\pm P$ w liczbach całkowitych, ~~a mianowicie ze znakiem wyż~~szym, jeżeli ~~$\frac{p}{q}>x$~~, a następnie i zrównanie $ax^2-2mxy-ny^2=\pm P$ ~~będzie~~ będzie mogło być rozwiązanem, mianowicie zaś ze znakiem wyższym, jeżeli wartość przybliżona $\frac{p}{q}>x$, z niższym zaś jeżeli $\frac{p}{q}<x$. Aby założyliśmy zrównanie $Ax^2+Bxy+Cy^2+D=0$, zatem dość położyć $A=a$, $2m=B$, $n=C$ a $D=\mp P$, z czego także widzimy że współczynnik B musi być parzystym, co zresztą przeciwnym łatwo dokazać pomnożywszy całe zrównanie przez 2. Współczynnik też A zawsze przyjąć można za dodatny. Cała przeto sztuka rozwiązania założonego zrównania ~~zależy~~ opiera się na tej samej co poprzednio zasadzie t.j. na poszukaniu między mianownikami P_n, liczby P danej w zrównaniu. Rozumie się,

(*) Przypisek. Ostatniej postaci zrównanie rozwiązać w liczbach wymiernych, jest bardzo łatwo. Tak np. chcąc znaleźć wartości x i y sprawdzające zrównanie $7x^2-11y^2=908$, tedy ponieważ $908=2^2.227$, zmnożywszy całe zrównanie przez 7 i położywszy $x=\frac{\xi}{\zeta}$ a $y=\frac{\upsilon}{\zeta}$ będzie $7^2\xi^2-77\upsilon^2=2^2.1589\zeta^2$, a kładąc $7\xi=\xi_1$ i $2\zeta=\zeta_1$, otrzymamy zrównanie $\xi_1^2-77\upsilon^2=1589\zeta_1^2$ z którem się już umiemy obejść. W tym tu przypadku skoro przyjdziemy do zrównania $\xi_5^2-\zeta_5^2=2\upsilon_4^2$ i z niego za wprowadzeniem nieoznaczonych p i q tak że $\upsilon_4=pq$, znajdziemy dla $p=1$ i $q=1$, $\xi_5=3$, $\zeta_5=-1$, $\upsilon_4=2$. Z temi wartościami wracając do x i y za pomocą poprzednich zrównań znajdziemy rzeczywiście $x=\frac{323}{13}$ a $y=\frac{229}{13}$ które sprawdzają założone zrównanie.

że owo przybrane zrównanie, niczém innem nie jest względem naszego założonego jak tylko $Ax^2+Bx+C=0$, czyli $ax^2 \mp 2mx = n$ i że wartość x z tego zrównania otrzymaną, rozwinąć potrzeba na ułamek ciągły, a liczby $D = P$ szukać między mianownikami P_n, które, jeżeli się kilka razy znajdzie, da nam tyleż rozwiązań założonego zrównania.

Ale oprócz wartości $x = \frac{m+\sqrt{an+m^2}}{a}$, jest jeszcze druga $x = \frac{m-\sqrt{an+m^2}}{a}$, cóż z nią zrobimy? Oto dosyć jest wspólnemu ilorazowi $\frac{\sqrt{A}-Q_n}{-P_n}$ nadać postać $\frac{\sqrt{A}+Q'_n}{P'_n}$, kładąc $-Q_n = +Q'_n$ a $-P_n = +P'_n$ i wtedy znajdziemy przybliżoną wartość $\frac{p}{q}$ rozwiązującą zrównanie $ax^2 - 2mxy - ny^2 = \mp P$ pod temiż samemi warunkami.

§32. Po tych uwagach weźmy do ~~rozwiązania~~ ogólnie zrównanie

$$ax^2+2bxy+cy^2=N$$

do rozwiązania w liczbach całkowitych, z warunkiem, o którym się już wyżej wspomniało, że współczynnik a jest liczbą dodatnią albo się go taką uczyniło, także że współczynnik mnożący iloczyn niewiadomych xy, jest liczbą parzystą, lub się go takim uczyniło. W rozwiązaniu tego zrównania nastręczyć się możemy na cztery przypadki, mianowicie:

$b^2-ac=0$, $b^2-ac<0$ czyli odjemne, b^2-ac = dokładnemu kwadratowi, i nareszcie że $b^2-ac>0$ czyli dodatne. Rozważmy każdy przypadek osobno.

1° Jeżeli $b^2-ac=0$, rozmnóżmy w tym przypadku całe zrównanie przez a i otrzymamy $a^2x^2+2abxy+acy^2=aN$. Dodawszy teraz i odjąwszy w pierwszej stronie tego zrównania b^2y^2, znajdziemy

$$(ax+by)^2-(b^2-ac)y^2=aN$$

czyli

$$(ax+by)^2=aN, \text{ bo } b^2-ac=0$$

Z ostatniego zrównania czytamy: że jeżeli dane zrównanie ~~ma~~ może być rozwiązanem w liczbach całkowitych, liczba aN powinna być dokładnym kwadratem. Z tegoż zrównania wypada $ax+by=V$ jeżeli położymy $aN=V^2$.

To ostatnie zrównanie jest nieoznaczoném pierwszego stopnia z dwiema niewiadomemi, które rozwiązawszy wiadomym sposobem, znajdziemy x i y całkowite a dopełniające warunków założonego zrównania.

Niech np. danem będzie zrównanie $3x^2-12xy+12y^2=27$. Tu mamy $a=3$, $b=-6$, $c=12$, $N=27$. Ponieważ $b^2-ac=36-3.12=0$, więc powyżej wskazaną drogą znajdziemy $(3x-6y)^2=81$ czyli $3x-6y=9$, albo nareszcie $x-2y=3$, z którego $x=2y+3$, z czego widzimy że y może być wziętą za dowolną nieoznaczoną, za którą biorąc wszystkie liczby całkowite, otrzymywać będziemy na x także liczby całkowite, a każde dwie do siebie należące wartości x i y, sprawdzą zrównanie założone. Wartościami temi są

$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$ i t.d.
$x = 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,$

Ostatnie np. wartości dają $3.17^2-12.17.7+12.7^2=27$

Niech jeszcze danem będzie zrównanie $9x^2-24xy+16y^2=289$

Tu otrzymamy zrównanie pierwszego stopnia $9x-12y=51$ czyli $3x-4y=17$ z którego znajdziemy $x=4\omega+3$ a $y=3\omega-2$; a biorąc za ω wszystkie liczby całkowite, otrzymamy nieskończoną liczbę rozwiązań założonego zrównania także w liczbach całkowitych.

2° Jeżeli $b^2-ac<0$, tedy położywszy $b^2-ac=-d$, skąd $c=\frac{b^2+d}{a}$, położymy tę wartość w założoném zrównaniu, a otrzymamy $(ax+by)^2+dy^2=aN$, albo kładąc $ax+by=t$, $t^2+dy^2=aN$ skąd $t^2=aN-dy^2$, co dowodzi że aby to ostatnie zrównanie, ~~ma~~ a następnie i założone mogło być rozwiązaném w liczbach całkowitych, liczba N musi być dodatną, kładąc w ostatniem zrównaniu całkowite liczby za y otrzymuje się tylko takie wartości na t^2 które są dokładnemi kwadratami

Przykład. Dane jest zrównanie $7x^2-4xy+5y^2=287$ do rozwiązania w liczbach całkowitych. Tu mamy $a=7$, $b=-2$, $c=5$, $N=287$. Ponieważ $b^2-ac=-31$, będzie więc $d=31$, a wyżej wskazaną drogą znajdziemy

$$(7x-2y)^2+31y^2=2009$$

t.j. $$t=7x-2y \quad a \quad t^2=2009-31y^2$$

Kładąc tu $y=1, 2, 3, 4 \ldots$ znajdziemy dla $y=8$, $t^2=25$, przeto $t=5$. Z temi wartościami mamy $x=\frac{t+2y}{7}=\frac{21}{7}=3$. Otóż $x=3$ i $y=8$ są jednem rozwiązaniem podanego zrównania w liczbach całkowitych, jest bowiem rzeczywiście $7.3^2-4.8.3+5.8^2=287$.

Inny przykład. Znaleźć całkowite wartości x i y, dopełniające warunków zawartych w zrównaniu $11x^2-6xy+3y^2=396$. Tu znowu mamy: $a=11$, $b=-3$, $c=3$, $N=396$, jest przeto $b^2-ac=9-33=-24$, a dalej $d=24$, położywszy więc $c=3=\frac{b^2+d}{a}=\frac{9+24}{11}$, znajdziemy

$$(11x-3y)^2+24y^2=4356$$

t.j. $$11x-3y=t \quad i \quad t^2=4356-24y^2$$

Dla $y=12$, wypada $t^2=900$, zatem $t=30$, a następnie $x=6$. Jest też w istocie $11.6^2-6.6.12+3.12^2=396$.

3° Jeżeli $b^2-ac=k^2$ t.j. jeżeli ta różnica jest dokładnym kwadratem, natenczas wziąwszy jak w poprzedniem wartość $c=\frac{b^2-k^2}{a}$ i włożywszy ją w zrównanie dane za c, podobnie jak wyżej otrzymamy

$$(ax+by)^2-k^2y^2=aN$$

czyli $$(ax+by+ky)(ax+by-ky)=aN$$

albo $$\{ax+(b+k)y\}\{ax+(b-k)y\}=aN$$

Ponieważ pierwsza strona tego zrównania składa się z dwóch czynników, więc liczbę aN rozłożywszy takie wszystkie razy ile się da na dwa czynniki, niech takiemi dwoma należącemi do siebie będą g i h tak że $aN=gh$, tedy wolno położyć

$$ax+(b+k)y=g$$
$$ax+(b-k)y=h$$

Przez rugowanie znajdziemy $y=\frac{g-h}{2k}$, tudzież $x=\frac{g-(b+k)y}{a}$

Z czynników liczby aN t.j. z czynników g i h bierze się tylko takie, które x i y czynią całkowitemi, bo te tylko rozwiążą podane zrównanie.

Tak np. w zrównaniu $15x^2-26xy+8y^2=57$, mamy $a=15$, $b=-13$, $c=8$ więc $b^2-ac=49$, a zatem $k=7$ zaś $aN=855=1.855=3.285=5.171=15.57$

Próbując tych czynników, znajdujemy że tylko $g=57$ i $h=15$ czynią y całkowitem bo $y=\frac{g-h}{2k}=\frac{57-15}{14}=3$. Przechodząc więc do x mamy:

$x=\frac{g-(b+k)y}{a}=\frac{57+18}{15}=5$, zatem $x=5$ i $y=3$ rozwiążą dane zrównanie. Jakoż $15.5^2-26.5.3+8.3^2=57$.

Dla zrównania $11x^2-28xy+12y^2=355$ znajdziemy $x=7$, $y=1$, zaś dla zrównania $13x^2+30xy+8y^2=3423$ - - - - $x=11$, $y=5$.

4° Nareszcie, jeżeli $b^2-ac>0$ t.j. jest liczbą dodatną, tedy położymy $b=-m$ a $c=-n$, a ogólne zrównanie przejdzie na następujące

$$ax^2-2mxy-ny^2=N$$

w którem naturalnie $an+m^2=b^2-ac$ i jest liczbą dodatną a niedokładnym kwadratem, pierwiastki przeto zrównania napomocniczego przybranego, mianowicie zrównania $ax^2-2mx=n$, są rzetelne lecz niewymierne, rozwinąwszy przeto każdy z nich na ułamek ciągły jak się wyżej wskazało, pokaże się potem

między mianownikami P_n liczby N. Jeżeli się ta ostatnia nie znajdzie, podane zrównanie będzie mogło być rozwiązaniem w liczbach całkowitych, przeciwnie, nie może być rozwiązanem w takich liczbach. W § 105 bowiem 32 znaleźliśmy $ap^2-2mpq-nq^2=\pm P$ t. j. $ap^2+2bpq+cq^2=\pm P$, przeto jeżeli w dwóch zrównaniach $ax^2+2bxy+cy^2=N$ i $ap^2+2bpq+cq^2=\pm P$ drugie strony są sobie równe, wartości p i q dadzą nam jedno rozwiązanie zrównania pierwszego tak że będzie $x=p$, $y=q$. Jeżeli pomiędzy mianownikami P_n liczba N znajduje się kilka razy, natenczas każda wartość przybliżona $\frac{p}{q}$ odpowiadająca mianownikowi $P_n=N$, da inne nowe rozwiązanie tegoż zrównania.

<u>Przykład</u> Danem jest zrównanie $3x^2-22xy+15y^2=12$ do rozwiązania w liczbach całkowitych. Ze zrównania $3x^2-22x+15=0$ mamy $x=\frac{11\pm\sqrt{76}}{3}$; rozwijając przeto pierwiastek $x=\frac{\sqrt{76}+11}{3}$ na ułamek ciągły, mamy:

$$\frac{\sqrt{76}+11}{3}=6+$$
$$\frac{\sqrt{76}+7}{9}=1+$$
$$\frac{\sqrt{76}+2}{8}=1+$$
$$\frac{\sqrt{76}+6}{5}=2+$$
$$\frac{\sqrt{76}+4}{12}=1+$$
$$\frac{\sqrt{76}+8}{1}=16+$$
$$\frac{\sqrt{76}+8}{12}=1+$$
$$\frac{\sqrt{76}+4}{5}=2+$$

$$6,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 16,\ 1,\ 2$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{6}{1},\ \frac{7}{1},\ \frac{13}{2},\ \frac{33}{5},\ \frac{46}{7},\ \frac{769}{117},\ \frac{815}{124},\ \text{i t. d.}$$

Pomiędzy mianownikami P_n znajdujemy liczbę 12, a temu mianownikowi odpowiadają ilorazy 1, tym zaś wartości przybliżone $\frac{33}{5}$ i $\frac{769}{117}$ a liczba z nich jest na miejscu parzystem, każda przeto jest większa od x, a dalej tak $x=33$, $y=5$, jako też $x=769$ a $y=117$ rozwiążą nasze zrównanie.

Jakoż $3.\overline{33}^2-22.33.5+15.5^2=12$ i $3.\overline{769}^2-22.769.117+15.\overline{117}^2=12$.

Gdyby było zrównanie $3x^2-22xy+15y^2=-5$, tedy pomiędzy mianownikami P_n znajduje się liczba 5 także dwa razy jak dotąd; wartości przybliżone tym mianownikom odpowiadające są $\frac{13}{2}$ i $\frac{815}{124}$, pierwsza stoi na trzeciem a druga na jednem miejscu, obie przeto rozwiążą podane zrównanie. Nie rozwiązałyby atoli zrównania $3x^2-22xy+15y^2=5$. Jest też rzeczywiście $3.\overline{13}^2-22.13.2+15.2^2=-5$ tudzież $3.\overline{815}^2-22.815.124+15.\overline{124}^2=-5$.

Zrównanie też $3x^2-22xy+15y^2=8$, rozwiążą przybliżone wartości $\frac{7}{1}$ i $\frac{2399}{365}$ t. j. $x=7$, $y=1$ i $x=2399$, $y=365$ i t. d.

§ 33. Po rozwiązaniu zrównania $ax^2+2bxy+cy^2=N$, możemy teraz przystąpić i do rozwiązania ogólnego zrównania

$$ay^2+2bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \quad \text{---} \quad (1)$$

Naturalnie że tu inaczej postąpić nie możemy, oprócz jak za pomocą wskazanego sposobu, przerobienia tego zrównania na ~~$x^2+Au^2=B$~~, $u^2-At^2=B$ tylko nam się wypada postarać przerobić to ogólne na inne, postaci jak wdopiero rozwiązaliśmy t. j. bez wyrazów mających pierwszą potęgę nieznanych ilości; pozbyć nam się więc należy z tego ogólnego zrównania wyrazów dy i ex. Lecz jakim że sposobem tego dokażemy? Zapewne nie innym tylko położeniem za x i y pewnych wartości któreby temu celowi odpowiedziały. Ponieważ zaś tych wartości nie znamy, więc położymy ogólnie $y=my'+\alpha$ a $x=nx'+\beta$. Te wartości wprowadziwszy w zrównanie (1)

znajdziemy:

$$am^2y'^2+2bmnx'y'+cn^2x'^2+m(2a\alpha+2b\beta+d)y'$$
$$+n(2b\alpha+2c\beta+e)x'$$
$$+a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta+f=0 \quad \text{---} (2)$$

Ponieważ chcemy żeby wyrazy mające x' i y' w pierwszej potędze zniknęły, więc dosyć jest położyć ich współczynniki $=0$, co nam wolno bo wyrazy d i e podają nam sposobność oznaczenia wartości wprowadzonych dwóch niewiadomych α i β zaś m i n w tych współczynnikach przez dzielenie zniknęą. Mieć więc będziemy $m(2a\alpha+2b\beta+d)=0$, czyli $2a\alpha+2b\beta+d=0$
$n(2b\alpha+2c\beta+e)=0$ --- $2b\alpha+2c\beta+e=0$ } ...(3)

Z tych dwóch zrównań przez rugowanie, otrzymamy

$$\alpha=\frac{cd-be}{2(b^2-ac)}, \quad \beta=\frac{ae-bd}{2(b^2-ac)}$$

Ponieważ i dwie liczby m i n są nieoznaczone i dowolne, więc możemy niemi rozrządzić do upodobania, aby tylko cel osięgnąć. Położmy przeto $m=n=\frac{1}{2(b^2-ac)}$, a wtenczas zaś otrzymamy

$$y=my'+\alpha=\frac{y'+cd-be}{2(b^2-ac)}, \quad x=nx'+\beta=\frac{x'+ae-bd}{2(b^2-ac)}$$

Takie tedy wartości położyć należy za x i y w zrównaniu (1) ażeby wyrazy z pierwszą potęgą niewiadomych zniknęły. Aże x i y mają być całkowitemi, więc z tych ostatnich wartości, jeśli to w ogólności być może, tak je wyznaczyć należy, iżby były w postaci liczb całkowitych, co jedynie od współczynników a, b, c, d, e, jak widzimy zależy. Atoli w przerobionem zrównaniu (2) pozostaje jeszcze do obrachowania wyraz ostatni który zamyka α i β. Postarajmy się wyrazić go przez współczynniki zrównania (1). Na ten koniec pierwsze ze zrównań (3) rozmnożymy przez α a drugie przez β i dodajmy, a otrzymamy

$2a\alpha^2+4b\alpha\beta+2c\beta^2+d\alpha+e\beta=0$ skąd $a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2=-\frac{d\alpha+e\beta}{2}$. Jeśli teraz w zrównaniu (2) w ostatnim wyrazie położymy tę wartość, znajdziemy $a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta+f=d\alpha+e\beta+f-\frac{d\alpha+e\beta}{2}=\frac{d\alpha+e\beta}{2}+f$

Położywszy tu teraz wartości powyższe α i β, znajdziemy ten ostatni wyraz $=\frac{cd^2-2bde+ae^2}{4(b^2-ac)}+f$. Połóżmy jeszcze $cd^2-2bde+ae^2=M$ a $b^2-ac=N$, tedy tenże wyraz będzie $=\frac{M}{4N}+f$. Lecz $m^2=n^2=\frac{1}{4(b^2-ac)^2}=\frac{1}{4N^2}$ więc ponieważ i $mn=\frac{1}{4(b^2-ac)^2}=\frac{1}{4N^2}$, więc ostatni wyraz sprowadziwszy do tegoż samego mianownika będzie $=\frac{MN+4N^2f}{4N^2}$, a opuszczając potem tegoż mianownika, przerobione zrównanie napisać będzie

$$ay'^2+2bx'y'+cx'^2+4N^2f+MN=0$$

t. j. zrównanie postaci jakie poprzednio rozwiązaliśmy.

Przykład. Niech nam danem będzie zrównanie

$$5y^2-6xy+3x^2-40y+12x+102=0$$

Wskazanym sposobem znajdziemy $y=\frac{y'+cd-be}{2(b^2-ac)}=\frac{y'-84}{-12}$, $x=\frac{x'+ae-bd}{2(b^2-ac)}=\frac{x'-60}{-12}$

Dla ułatwienia dalszego rachunku, ponieważ x i y mają być całkowitemi, możemy położyć $\pm 12y'$ za y' a $\pm 12x'$ za x'; w pierwszym razie otrzymamy $y=-y'+7$, $x=-x'+5$ w drugim zaś $y=y'+7$, $x=x'+5$. Te ~~[illegible]~~ wartości położywszy w danem zrównaniu, wyrazy mające pierwszą potęgę niewiadomych x i y zniknęą, a wypadkowe przerobione zrównanie otrzymamy w obu razach

$$5y'^2-6x'y'+3x'^2=8$$

W tem zrównaniu jest $b^2-ac<0$, zatem jak wiemy (§ 32. 2°) ponieważ $b^2-ac=-6=-d$ zatem $(5y'-3x')^2+6x'^2=5.8=40$, $5y'-3x'=t$, a $t^2=40-6x'^2$. Dla $x'=2$ jest $t=4$, przeto $y'=2$ a następnie $y=\pm y'+7$ t. j. $y=9$ lub 5, $x=\pm x'+5$ t. j. $x=7$ lub 3. Tak pierwsze jak i drugie wartości sprawdzają zrównanie

Dobrze tu uważać należy że ~~wartości~~ upraszczawszy wartości na y' i x', biorąc $\pm 12y'$ za y' a $\pm 12x'$ za x', gdybyśmy rachowali ostatni wyraz przerobionego zrównania, który teraz znaleźliśmy -8, znaleźlibyśmy go $= 1152$ t. j. 144 razy większy. Ten sam wyraz otrzymalibyśmy także w przerobionem zrównaniu $\frac{y'}{12}$ za y' i $\frac{x'}{12}$ za x'.

Przykład drugi (Zrównanie $13y^2+28xy+5x^2-80y-66x+33=0$ rozwiązać w liczbach całkowitych. Tu mamy $a=13$, $b=14$, $c=5$, $d=-80$, $e=-66$, $f=33$ zatem $y=\frac{y'+cd-be}{2(b^2-ac)}=\frac{y'+524}{262}$, $x=\frac{x'+ae-bd}{2(b^2-ac)}=\frac{x'+262}{262}$. A kiedy y i x mają być całkowitemi, zostaną więc niemi chociaż położymy $262y'$ za y', a $262x'$ za x', tym zaś sposobem otrzymamy $y=y'+2$ a $x=x'+1$, które wartości położywszy w danem zrównaniu, znajdziemy

$$13y'^2+28x'y'+5x'^2=80.$$

Skoro więc rozwiążemy to tu zrównanie w liczbach całkowitych, otrzymamy też y i x całkowite rozwiązujące zrównanie założone. W ostatniem zrównaniu jest $b^2-ac=131$ t. j. $b^2-ac>0$, zatem według przypadku 4° (§ 33.) użyć tu potrzeba ułomków ciągłych. Atoli wprzód należy pierwszą jego stronę przywieść do najprostszego wyrażenia, mianowicie żeby współczynnik średniego wyrazu 28 przynajmniej nie przewyższał współczynników wyrazów skrajnych 13 i 5 a wpełako żeby ilość b^2-ac została nienaruszoną. W tym celu, ponieważ oba współczynniki skrajne są mniejsze niż uczony średni, może się nam uda za jednem przerobieniem uczynić średni mniejszym niż skrajne. Dlatego połóżmy $x'=x''-ny'$ a znajdziemy

$$(5n^2-28n+13)y'^2-(10n-28)x''y'+5x''^2=80$$

Tu, ponieważ n jest nieoznaczonem, można tak n tak obrać że $10n-28$ będzie mniejszem niż 5 a tem samem mniejszem niż 13. Jakoż, położywszy $n=3$, znajdziemy $-26y'^2-2x''y'+5x''^2=80$

albo $26y'^2+2x''y'-5x''^2=-80$

gdzie rzeczywiście $b^2-ac=131$ a współczynnik średni jest mniejszym niż oba skrajne. W przeciwnym razie, gdyby jeszcze drugi skrajny współczynnik był mniejszym od średniego, potrzebaby toż samo przerobienie wykonać dla drugiego współczynnika. Każda więc wartość y' tudzież $x'=x''-3y'$ rozwiązujące ostatnie zrównanie rozwiążą też i poprzednie, a następnie wartości $y=y'+2$ i $x=x'+1$ rozwiążą zrównanie założone w liczbach całkowitych.

Chcąc rozwiązać ostatnie zrównanie, potrzebnym jest warunek żeby x'' i 80 nie miały żadnego wspólnego dzielnika, czyli raczej, żeby były między sobą pierwszemi. A tu bo nieznanej wartości x'', wpełako widzimy że $80=4^2.5$, więc nawet dla uproszczenia tego zrównania położyć można i należy $4y''$ za y' a $4x'''$ za x'' przez co otrzymamy zrównanie uproszczone $26y''^2+2x'''y''-5x'''^2=-5$

Mając do tego stopnia uproszczone zrównanie, którego całkowite wartości y'', x''', dadzą nam także całkowite y' i x'', a te znowu całkowite y' i x' i nareszcie te ostatnie dadzą również całkowite y i x rozwiązujące zrównanie założone, nie pozostaje już nic innego jak tylko względne pierwiastki zrównania $26z^2+2z-5=0$ rozwinąć na ułomki ciągłe i zobaczyć które ilorazy zupełne mają mianowniki 5. Ponieważ $z=\frac{-1\pm\sqrt{131}}{26}$, więc rozwinąwszy dodatny pierwiastek $\frac{-1+\sqrt{131}}{26}$

na ułomek ciągły będzie

$$\frac{\sqrt{131}-1}{26}=0$$
$$\frac{\sqrt{131}+1}{5}=2$$
$$\frac{\sqrt{131}+9}{10}=2$$
$$\frac{\sqrt{131}+11}{1}=22$$
$$\frac{\sqrt{131}+11}{10}=2$$
$$\frac{\sqrt{131}+9}{5}=4$$
$$\frac{\sqrt{131}+11}{2}=11$$
$$\frac{\sqrt{131}+11}{5}=4$$
$$\frac{\sqrt{131}+9}{10}=2$$
$$\frac{\sqrt{131}+11}{1}=22$$

i t. d.

Wartości przybliżone tego ułomka będą

$$\overset{2}{\frac{0}{1}},\ \overset{2}{\frac{1}{2}},\ \overset{22}{\frac{2}{5}},\ \overset{2}{\frac{45}{112}},\ \overset{4}{\frac{92}{229}},\ \overset{11}{\frac{413}{1028}},\ \overset{4}{\frac{4635}{11537}},\ \overset{2}{\frac{18953}{47176}},\ \overset{22}{\frac{42541}{105889}}$$ i t. d.

W zupełnych ilorazach widzimy mianownika 5, odpowiadającego ilorazowi 2, potém dalej dwom ilorazom peryjodu 4, odpowiada także mianownik 5, zatém wartości przybliżone $\frac{0}{1}$, $\frac{92}{229}$, $\frac{4635}{11537}$ i t. d. rozwiążą ostatnie zrównanie. Że zaś wszystkie wzmiankowane wartości są na miejscach nieparzystych, więc rozwiążą też zrównanie oczywiście — t. j. tak jak się też zrównanie przedstawia. Tak więc pierwszém rozwiązaniem są wartości $y'''=0$, $x'''=1$, ~~[illegible]~~ a z temi znajdziemy $y'=4y''=0$, $x''=4x'''=4$, a następnie $x'=x''-3y'=4$, a nareszcie $y=y'+2=2$, $x=x'+1=5$. Drugie rozwiązanie ostatniego zrównania jest $y'''=92$, $x'''=229$, z których tak jak poprzednio przyjdziemy do wartości ~~y=−370~~, x=~~1157~~ 2021, rozwiązujących zrównanie dane; dalej z wartości $y'''=4635$, $x'''=11537$ przyjdziemy do y=18542 38 ~~[illegible]~~ i x=~~161769~~ −9471. Z każdego następnego peryjodu otrzymamy dwa rozwiązania aż do nieskończoności.

y = 370
x = −187

Drugi z pierwiastków t. j. $\frac{-1-\sqrt{131}}{26}$ jak widzimy jest odjemnym, potrzebujemy go więc pod postacią $-\frac{\sqrt{131}+1}{26}$ i rozwinąwszy na ułomek ciągły, czyli szukając następnych ilorazów zupełnych a potém wartości przybliżonych, znajdziemy że rozwiązującemi ostatnie przerobione i uproszczone zrównanie są: $-\frac{0}{1}$, $-\frac{11}{23}$ i $-\frac{4635}{9683}$ t. j. $y'''=0$, $x'''=1$; drugie $y'''=-11$, $x'''=23$ a trzecie $y'''=-4635$, $x'''=9683$. Wracając zaś do wartości y i x rozwiązujących zrównanie założone, znajdziemy takowe, zupełnie tym samym co wyżej sposobem $y=2$, $x=5$; $y=-42$, $x=2253$ i $y=-18538$, $x=104353$. Z następnych peryjodów otrzymamy dalsze rozwiązania do nieskończoności.

§311. Tym więc sposobem rozwiązuje się każde inne zrównanie, które rzeczywiście $P < b^2-ac$ albo też przez powyższe przerobienie może być sprowadzone do tego stanu. Ale jakże rozwiązać zrównanie $ay^2+bxy+cx^2=P$ gdzie P może być parzystém lub nieparzystém i w którém $b^2-ac>0$ i nie kwadrat zupełny, ale $P>b^2-ac$? Otóż w takim przypadku potrzeba można

$$y = nx + Pz$$

a położywszy tę wartość w danem zrównaniu, znajdziemy

$$\frac{an^2+bn+c}{P}x^2+(2n+b)xz+Pz^2=\pm 1$$

Szukając wartości na n takiej, żeby $\frac{an^2+bn+c}{P}$ było liczbą całkowitą, jeśli takowej nie znajdziemy w granicach $-\frac{1}{2}P$ i $+\frac{1}{2}P$, wtedy z wszelką pewnością twierdzić możemy, że dane zrównanie nie może być rozwiązanem w liczbach całkowitych. Jeśli zaś znajdziemy więcej takich wartości, z każdą potrzeba odbyć następny rachunek. Położywszy jedną z tych wartości w ostatniem zrównaniu, otrzymamy zrównanie do rozwiązania postaci

$$fx^2+gxz+Pz^2=\pm 1$$

Rozwinąwszy na ułomek ciągły każdy z pierwiastków zrównania

$$fx^2+gx+P=0$$

znajdziemy przybliżoną wartość odpowiadającą zupełnemu ilorazowi, w którym $P_n=1$, która będzie wartością $\frac{x}{z}$, tak że oznaczywszy ją przez $\frac{p}{q}$, będzie $x=p$, $z=q$, które wartości rozwiązują zrównanie $fx^2+gxz+Pz^2=\pm 1$. Z wartościami n, x, z, znajdziemy także y całkowite i tym sposobem znajdziemy jedno rozwiązanie. Ponieważ ułomek ciągły, z którego się znalazło x i z jest peryjodycznym, więc następne peryjody dadzą inne rozwiązania tymże samym sposobem.

Możny na chybi trafi następujący przykład. Zrównanie

$$13y^2-28xy+5x^2+3y+2x+87=0$$

rozwiązać w liczbach całkowitych. Usuwając wyrazy z pierwszemi potęgami y i x, znajdziemy wiadomą drogą, że potrzeba położyć $y=\frac{y'+43}{262}$ a $x=\frac{x'+68}{262}$; co wykonawszy przyjdziemy do zrównania $13y'^2-28x'y'+5x'^2=-6006743$

Tu jest $b^2-ac=14^2-13.5=131$ t. j. dodatne, nie jest liczbą kwadratową, zaś $P=-6006743$ t. j. $P>b^2-ac$ nie mając względu na znaki. Liczba 6006743 składa się z dwóch czynników pierwszych, mianowicie 131 i 45853 nie da się przeto przywieść do przypadku, iżby druga strona zrównania była mniejszą niż 131. Nie pozostaje nam więc nic innego, tylko w ostatniem zrównaniu położyć

$$y'=nx'-6006743z$$

przez co otrzymamy $\frac{13n^2-28n+5}{6006743}x'^2-(26n-28)x'z+78087659z^2=-1.$

Szukać teraz potrzeba wartości na n, w granicach -3003372 i $+3003372$, takiej liczby, któraby $\frac{13n^2-28n+5}{6006743}$ uczyniła liczbą całkowitą. Niektóre to jest zatrudnienie z powodu, że mianownik jest znaczną liczbą i składa się tylko z dwóch czynników pierwszych, jak wyżej powiedzieliśmy. Po nader wielu próbach przyszliśmy nareszcie do znalezienia $n=-2374646$ i to jest najmniejszą liczbą czyniącą powyższe wyrażenie liczbą całkowitą. ~~która~~ Tę wartość n położywszy w ostatniem zrównaniu, znajdziemy:

$$12204007x'^2+61740824x'z+78087659z^2=-1$$

Do tego stanu przyprowadziwszy równanie, dość będzie teraz rozwinąć jeden z pierwiastków równania $12204007x'^2+61740824x'+78087659=0$ na ułamek ciągły aby znaleźć wartości x' i z zadość czyniące powyższe równanie. Pierwiastkami ostatniego równania są

$$x'=\frac{-30870412\pm\sqrt{131}}{12204007}$$

oba zatem odjemne. Rozwijając pierwiastek większy, mamy

$$-\frac{30870412+\sqrt{131}}{12204007}=2$$
$$\frac{6462398-\sqrt{131}}{3422039}=1$$
$$\frac{3040359+\sqrt{131}}{2701250}=1$$
$$\frac{339109-\sqrt{131}}{42571}=7$$
$$\frac{41112+\sqrt{131}}{39703}=1$$
$$\frac{1409-\sqrt{131}}{50}=27$$
$$\frac{\sqrt{131}+59}{67}=1$$
$$\frac{\sqrt{131}+8}{1}=19$$

Szukając wartości przybliżonych, znajdziemy odpowiadającą ostatniemu ilorazowi $-\frac{1242}{491}$. Wziąwszy więc $x'=1242$ a $z=-491$, znajdziemy $y'=481$. Przeto

$$y=\frac{y'+43}{262}=\frac{481+43}{262}=\frac{524}{262}=2,\quad x=\frac{x'+68}{262}=\frac{1242+68}{262}=\frac{1310}{262}=5$$

Wartości te rozwiązują rzeczywiście założone równanie. Chcąc otrzymać inne rozwiązania, potrzeba by szukać innych wartości n czyniących zadość warunkowi $\frac{13n^2-28n+5}{6006743}=$ liczbie całkowitej, bo rozwinięcie drugiego z pierwiastków powyższego równania, doprowadzi nas tylko do tychże samych wartości x' i z. Z następnych atoli peryjodów obu ułamków ciągłych, znajdzie się nieskończona liczba rozwiązań. Chociaż bowiem w powyższem rozwinięciu nie widzimy prawa według którego postępują ilorazy, to przecięż w następnych i dalszych peryjodach to prawo wystąpi wyraźnie, bo po ostatnim 19, następują ilorazy 2, 4, 11, 4, 2, 22, 2, 4, 11, 4, 2, 22, i t. d.

§ 35. W całej tej robocie niemasz nic trudnego jedynie szukanie liczby n. Któż bowiem odważy się na próbowanie w tym tu przypadku, gdzie mianownik 6006743 składa się tylko z dwóch pierwszych czynników, wszystkich liczb, poczynając od 1 aż do 2374646 tak dodatnie jak odjemnie *) A chociażby sobie można nieco ułatwić i skrócić tę robotę szukając takiej wartości na n któraby dwa wyrażenia

$$\frac{13n^2-28n+5}{131}\ ;\ \frac{13n^2-28n+5}{45853}$$

uczyniła liczbami całkowitemi, to przecięż i tak wypada próbować liczby od 1 do 22926 która próba odstraszyłaby każdego najcierpliwszego i najwprawniejszego rachmistrza. Zachodzi przeto pytanie, czyliby tak mozolnego rachunku jakim sposobem wyminąć niepodobna? Ja na to odpowiadam, że jeżeli się chcemy zapewnić o możności lub niemożności rozwiązania podanego równania w liczbach

*) Jakkolwiek można wykluczyć z pod próby może więcej niż połowę tych liczb.

w liczbach całkowitych, na ten czas nie masz innego sposobu trafienia niemylnie do celu. W wielu atoli przypadkach, szczególniej gdy współczynniki pierwotnego zrównania nie są wielkiemi liczbami, może jest łatwiejszy i prędszy sposób podany przez Eulera w „Commentationes arithmeticae collectae Petropoli 1849" na stron. 549 tomu I. Sposób jego zasadza się na tém aby przez próbowanie znaleść jedno rozwiązanie danego zrównania a potém przy pomocy tego znaleść inne jak następuje:

Przypuśćmy że $y=m$ i $x=n$ rozwiązuje zrównanie

$$ay^2+2bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$

tak że,
$$am^2+2bmn+cn^2+dm+en+f=0$$

będzie też
$$a(y^2-m^2)+2b(xy-mn)+c(x^2-n^2)+d(y-m)+e(x-n)=0$$

Różnice kwadratów rozłożywszy na czynniki, tudzież położywszy
$2b(xy-mn) = b(y-m)(x+n)+b(y+m)(x-n)$, a nareszcie ustanowiwszy stosunek między $y-m$ i $x-n$ tak że $\frac{y-m}{x-n}=\frac{p}{q}$, skąd $qy-qm=px-pn$, otrzymamy

$$(y+m)(ap+bq)+(x+n)(bp+cq)+dp+eq=0$$

Z tego i poprzedniego zrównania rugując x a potém y, znajdziemy

$$y=\frac{-m(ap^2-cq^2)-2n(bp^2+cpq)-dp^2-epq}{ap^2+2bpq+cq^2}$$

$$x=\frac{n(ap^2-cq^2)-2m(bq^2+apq)-dpq-eq^2}{ap^2+2bpq+cq^2}$$

Te atoli wartości będąc pod postacią ułamkową, wtedy tylko będą całkowitemi, gdy liczniki obu podzielnemi będą przez wspólnego mianownika. Temu warunkowi wtedy tylko stać się może zupełnie zadosyć, gdy $ap^2+2bpq+cq^2=\pm 1$, inne zaś przypadki możliwe są niepewne bo tylko próbować potrzeba różnych na p i q wartości dopóki się nie natrafi na takie że nam dadzą x i y całkowite, wszelkie bowiem inne dadzą też wartości tylko wymierne. Zestrzedz tu tylko wypada, że w przypadku $b^2<ac$ czyli $b^2-ac<0$ t.j. gdy ta ilość jest odjemną, danego zrównania nie można [tym sposobem] rozwiązać w liczbach całkowitych.

Znalezione z powyższych wzorów wartości y i x położywszy w tychże samych wzorach za m i n, znajdziemy nowe rozwiązanie, z którem postąpić należy jak z poprzedniem i tym sposobem z każdego nowo otrzymanego, znajdować będziemy następne rozwiązanie.

Jeszcze tu należy powiedzieć o zrównaniu warunkowem $ap^2+2bpq+cq^2=\pm 1$ iż wtedy tylko znaleść można wartości p i q sprawdzające też zrównanie, gdy pierwiastki zrównania $ap^2+2bp+c=0$ są rzeczywistemi (?) t.j. jeżeli b^2-ac jest ilością dodatnią; dlatego to powiedziało się wyżej że gdy $b^2<ac$, dane zrównanie nie może być rozwiązanem w liczbach całkowitych.

Dla objaśnienia tego postępowania, weźmy poprzednio rozwiązane zrównanie $13y^2-28xy+5x^2+3y+2x+87=0$. Napisawszy je następnie $y(13y+3)+x(5x+2)=28xy-87$, widzimy

że druga (jego) strona ~~równania~~ jest liczbą nieparzystą, i pierwsza przeto takąż liczbą być musi. Aby to było, jeden z wyrazów musi być parzystym a drugi nieparzystym. Lecz pierwszy wyraz bądź to że położymy y parzyste lub nieparzyste, jest zawsze liczbą parzystą, drugi zaś kładąc x parzyste jest parzystą, skoro zaś położymy x nieparzyste, będzie liczbą nieparzystą. Z tego się pokazuje że y mieć musi parzyste, zaś x nieparzyste liczby za wartości. Próbując zatem różnych liczb, brać potrzeba za y parzyste, zaś za x nieparzyste. Połóżmy naprzód $y=2$ a $x=3$, znajdziemy $y(13y+3)=58$, $x(5x+2)=51$; pierwsza więc strona jest $=109$ druga zaś $28xy-87=168-87=81$. Weźmy następnie $y=2$, $x=5$, tedy $y(13y+3)=58$, $x(5x+2)=135$ t.j. pierwsza strona $=193$ druga zaś $28xy-87=280-87=193$, zatém wartości $y=2$, $x=5$ rozwiązują dane równanie. Położywszy teraz we wzorach na y i x, $m=2$, $n=5$, potrzeba oprócz tego dopełnić warunku $13p^2-28pq+5q^2=\pm 1$. Tego warunku dopełnimy rozwijając pierwiastki równania $13p^2-28p+5=0$ na ułamki ciągłe. Pierwiastki tego równania są: $p=\frac{14\pm\sqrt{131}}{13}$. ~~Doda~~ Większy z tych pierwiastków rozwinięty, da nam najmniejsze wartości $p=2$, $q=1$ tak że $13.2^2-28.2.1+5.1^2=+1$. To mając, z wartości więc $m=2$, $n=5$, $p=2$, $q=1$ znajdziemy z podanych wyżej wzorów nowe rozwiązanie $y=350$, $x=179$. ~~[illegible]~~

~~$y=-47m+92n-12-4=-(47m-92n+16)$~~

~~$x=47n-24m-6-2=47n-24m-8$~~

Położywszy ~~x~~ $m=350$ a $n=179$, znajdziemy $y=2$, $x=5$ na dowód że z wartościami $p=2$ i $q=1$ nie można znaleźć innych rozwiązań. Rozwinąwszy drugi z powyższych pierwiastków na ułamek ciągły, znajdziemy $p=101$, $q=514$ a z temi wartościami i wartościami $m=2$, $n=5$, znajdziemy nowe rozwiązanie w liczbach całkowitych

$$y=10747413,\quad x=5469479.$$

Z dalszego peryjodu ułamku ciągłego z pierwszego pierwiastka wypadającego, znaleźlibyśmy $p=42541$ a $q=21734$, z któremi wartościami znaleźlibyśmy z powołanych wzorów znowu nowe wartości y i x rozwiązujące podane równanie w liczbach całkowitych i t.d. do nieskończoności, bo peryjody ułamków ciągłych powtarzają się także do nieskończoności.

Zdaje mi się że skoro się tylko uda znaleźć jedno rozwiązanie, jak wyżej $y=2$, $x=5$, inne rozwiązania daleko łatwiej znajdują się sposobem Eulera, niż ogólnym przez Lagrangia wskazanym.

§36. Toż samo równanie $13y^2-28xy+5x^2+3y+2x+87=0$ można by jeszcze i następującym, lubo nie bardzo wygodnym, rozwiązać sposobem. Wiemy że to równanie przerobić można na inne trzywyrazowe $u^2=At^2+B$ w którém $u=1048x-272$, $t=26y-28x+3$, $A=2096$ a $B=9537424$,

tak iż się otrzyma do rozwiązania równanie trzykrotnie wyrażone

$$u^2 = 2096t^2 + 9537424$$

które nas uczy, że dosyć jest znaleźć taką wartość całkowitą na t żeby druga jego strona była doskonałym kwadratem, gdyż potem znalazłszy u i t, mamy też x i y takie w liczbach całkowitych rozwiązujących podane równanie w takichże liczbach.

Otóż, jeśli A i B nie są wielkiemi liczbami, przez próbowanie można dość często znaleźć z wielkiej tej dwójki wartość t czyniącą drugą stronę tego wyrażenia równania doskonałym kwadratem. W naszym przypadku, lubo nie tak łatwo, bo A i B są dość znacznemi liczbami, po kilku próbach znajdziemy $t = \pm 85$ a przez tę wartość, $u = 4968$. Położywszy przeto jako pierwsze rozwiązanie $t = h = \pm 85$, $K = 4968$, mamy

$u^2 - 2096t^2 = 9537424$, tudzież $K^2 - 2096h^2 = 9537424$

zkąd $u^2 - 2096t^2 = K^2 - 2096h^2$. A jeśli jeszcze znajdziemy dwie liczby m i n takie, że $m^2 - 2096n^2 = 1$, co jest bardzo łatwo, mieć też będziemy $u^2 - 2096t^2 = (K^2 - 2096h^2)(m^2 - 2096n^2)$.

Położywszy tu $u = Km - 2096.hn$, otrzymamy:

$$K^2m^2 - 2.2096hKmn + 2096^2h^2n^2 - 2096t^2 =$$
$$= K^2m^2 - 2096K^2n^2 - 2096h^2m^2 + 2096^2h^2n^2$$

t.j. $t^2 = h^2m^2 - 2hKmn + K^2n^2 = (hm - Kn)^2$

zatem $t = hm - Kn$.

W naszym przypadku rozwinąwszy $\sqrt{2096}$ na ułamek ciągły, znajdziemy $m = 225144199$, $n = 4917735$.

Z temi wartościami mamy ogólne wyrażenia na u i t jak następuje:

$$u = 225144199K - 10307572560h$$
$$t = 4917735K - 225144199h$$

Położywszy tu znalezione wyżej przez próbowanie $h = \pm 85$, $K = 4968$, które wartości z równań $u = 1048x - 277$ i $t = 26y - 28x + 3$, dają $y = 2$, $x = 5$, znajdziemy nowe rozwiązanie $x = 231271673$, $y = 452679131$.

Chcąc znaleźć dalsze rozwiązanie, potrzebaby w ostatnich wzorach położyć za K to co się znalazło na u, a za h to, co się znalazło na t, a potem z nowo otrzymanemi wartościami u i t szukać nowych x i y. i t. d. F.

F. Ten sposób rozwiązania ogólnego równania, odpowiada, albo raczej jest tym samym jaki się podało w §§ 15. i 16.

§37. Jeśli w równaniu $ay^2 + 2bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, $b^2 - ac = 0$, natenczas równanie tego nie można rozwiązać w liczbach całkowitych żadnym z poprzednio podanych sposobów. W takim razie rozmnożywszy też równanie przez a oraz dodawszy i odjąwszy w pierwszej jego stronie bdx, otrzymamy

$$(ay+bx)^2 + d(ay+bx) + (ae-bd)x + af = 0$$

A położywszy $ay + bx = z$, otrzymamy równanie

$$z^2 + dz + (ae-bd)x + af = 0$$

w którem jedna z niewiadomych jest w stopniu pierwszym a druga w wyższym; przeto według naszego poprzednio §1 podanego sposobu rozwiązawszy to ostatnie równanie, znajdziemy z i x. (bowiem) Z ostatniego równania wypada

$$x = -\frac{af + dz + z^2}{ae - bd}$$

Skoro więc x ma być liczbą całkowitą, należy, biorąc dowolne wartości za z, takie tylko zatrzymywać, które nie tylko x czynią całkowitem, ale też i y w zrównaniu $ay + bx = z$, t. j. takie które przez a są podzielne.

Objaśnijmy to zaraz przykładem. Niechby nam podaném było do rozwiązania w liczbach całkowitych zrównanie

$$6y^2 - 36xy + 54x^2 + 7y - 5x - 23 = 0, \text{ w którem } b^2 - ac = \overline{18}^2 - 6.54 = 0$$

tedy według tego co powiedziano będzie

$$36y^2 - 6.36xy + 6.54x^2 + 7.6y - 7.18x - 30x + 7.18x - 138 = 0$$

czyli $(6y - 18x)^2 + 7(6y - 18x) + 96x - 138 = 0$

a kładąc $6y - 18x = z$

$$z^2 + 7z + 96x - 138 = 0$$

zkąd $x = \frac{138 - 7z - z^2}{96}$

Ponieważ $y = 3x + \frac{z}{6}$, przeto takie tylko wartości zatrzymamy na z które x czynią całkowitém a zarazem są podzielnemi przez 6. Kładąc tu $z = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ znajdziemy $z = 42$, która wartość daje $x = -20$ a potém $y = -53$. Wartość $z = -54$, da nam wartości $x = -25$, $y = -84$. Podobnież, wartość $z = -150$, da wartości $x = -222$, $y = -641$ i t. d.

Podobnież, gdyby nam podano do rozwiązania w liczbach całkowitych zrównanie $11y^2 - 66xy + 99x^2 - 50y - 88x - 994 = 0$ w którém $b^2 - ac = \overline{33}^2 - 11.99 = 0$, tedy podobną powyżej idąc drogą, kładąc $11y - 33x = z$ zkąd $y = 3x + \frac{z}{11}$, przyjdziemy do zrównania $z^2 - 50z - 2618x - 10934 = 0$ z którego $x = \frac{z^2 - 50z - 10934}{2618}$, gdzie próbując różne wartości na z tak dodatne jak odjemne i zatrzymując takie tylko które bez reszty są podzielnemi przez 11 i zarazem czynią x liczbą całkowitą, znajdziemy różne rozwiązania podanego zrównania w liczbach całkowitych. Tak np. dla $z = -132$, znajdziemy $x = 5$, $y = 3$; dla $z = -770$, otrzymamy $x = 237$, $y = 641$ i t. d.

W próbowaniu różnych wartości z ~~można~~ można wychodzić ze zrównania $z^2 - 50z - 10934 = 2618\alpha$, gdzie α oznacza każdą liczbę całkowitą. A ponieważ z tego zrównania wypada

$$z = 25 \pm \sqrt{2618\alpha + 11559}$$

należy przeto za α kłaść różne liczby całkowite do góry, dopóki summa pod znakiem pierwiastkowym nie będzie zupełnym kwadratem. I tak pierwszą wartość $z = -132$ znajdziemy kładąc $\alpha = 5$, drugą zaś $z = -770$, skoro położymy $\alpha = 237$. Że to jest rachunek zawsze mozolny, nie da się zaprzeczyć; skoro jednak innej pewnej drogi nie znamy, w razie potrzeby wypada go koniecznie podjąć.

Na początku już wspomniałem że w obecnej pracy podam tylko to co jest najważniejszem w rozwiązywaniu zagadnień nieoznaczonych prowadzących do zrównań drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi. Kończę przeto na tém, nie przestając dodawać że zachęcać do dzieła przezacnego Legendra i Gaussa liczby to, co się tu powiedziało nie uważali za wyczerpnięcie przedmiotu, ale raczej jako skazówkę i zachętę do dalszej, ogólniejszej i obszerniejszej a zarazem najtrudniejszej pracy. —

Koniec